# Untersuchungen

über die

# Parallelflächen der Flächen zweiten Grades.

**Inaugural-Dissertation**

zur

**Erlangung der philosophischen Doctorwürde**

an der

Universität Rostock

von

**Asmus Ahrendt**
aus Gr. Siemz i. Meckl.-Strel.

**Rostock.**
Universitäts-Buchdruckerei von Adler's Erben.
1888.

Referent: Herr Professor Dr. Krause.

Unter der Parallelcurve einer gegebenen Curve (Originalcurve) versteht man bekanntlich den geometrischen Ort des Mittelpunktes eines auf der Curve rollenden Kreises. Analog versteht man unter der Parallelfläche einer gegebenen Fläche (Originalfläche) den geometrischen Ort des Mittelpunkts einer auf der Fläche rollenden Kugel. Den Radius $\rho$ des Kreises, bezgl. der Kugel nennt man den Modul der Parallelcurve, bezgl. = Fläche.

Die Probleme der Parallelcurven sowohl als auch der Parallelflächen sind in neuerer Zeit vielfach behandelt. Die ersten Untersuchungen beschränkten sich naturgemäss im Wesentlichen darauf, die Gleichungen dieser Gebilde aufzustellen, und hier war eine Reihe von Methoden möglich. Besonders waren es jedoch die Curven und Flächen zweiten Grades, die als Originalgebilde zu Grunde gelegt wurden, und auf diesem Gebiete liegt denn auch eine umfangreiche Litteratur vor. Cauchy[1]) scheint zuerst (1841) die Parallelcurve der Ellipse untersucht zu haben; er definirt sie als Enveloppe eines Kreises, der auf der Ellipse rollt, und findet als Gleichung der Parallelcurve das Eliminationsresultat von $\theta$ zwischen den Gleichungen

---

[1]) Comptes rendus, Tome XIII. 1841.

$$\frac{a^2 x^2}{(\Theta + a^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(\Theta + b^2)^2} = 1$$
$$\frac{\Theta^2 x^2}{(\Theta + a^2)^2} + \frac{\Theta^2 y^2}{(\Theta + b^2)^2} = \rho^2 .$$

Im Jahre 1844 gab Catalan[1]) dann eine bequeme Methode an, diese Elimination auszuführen; er fand, dass die Parallelcurve vom achten Grade sei. Um dieselbe Zeit veröffentlichte ein Ingenieur Breton[2]) eine Arbeit über die Parallelcurve der Ellipse, die er „toroïde" nannte; er glaubte diese Curve in der Praxis verwenden zu können, und der Haupttheil seiner Untersuchungen bestand darin, dass er Constructionen für die Curve angab. Salmon[3]) wurde auf die Parallelcurven geführt durch die Betrachtung derjenigen Curven, die dieselben Evoluten haben wie eine gegebene Curve; er fand die Gleichung der Parallelcurve der Ellipse in der Form

$$4 S^3 = T^2,$$

eine Gleichung, die ebenfalls vom achten Grade ist, obgleich S und T vom vierten und sechsten Grade sind. Durch Salmon angeregt, nahm Fiedler[4]) das Problem der Parallelcurven auf; er untersuchte die Discriminante der Gleichung

$$S + k S_1 = 0,$$

wo $S = 0$ und $S_1 = 0$ die Gleichungen von Kegelschnitten sind. Dadurch nun, dass der eine Kegelschnitt ein Kreis wird, und durch Hinzunahme der Bedingung, dass dieser Kreis den Kegelschnitt berührt, fand er, dass sich die Gleichung der Parallel-

---

[1]) [2]) Nouvelles Annales de Mathématiques, Tome III. 1844.
[3]) Salmon, Treatise on the higher plane curves. 1852. cf. auch die Arbeit von Fiedler. (1862).
[4]) Salmon's Kegelschnitte, deutsch von Fiedler.

curve darstellen lasse als Discriminante einer Gleichung dritten Grades; die Coordinaten des Kreismittelpunktes traten dann als laufende Coordinaten der Parallelcurve in dieser Discriminante auf. Ebenso lässt sich die Gleichung der Parallelfläche als Discriminante einer Gleichung vierten Grades darstellen. Zu demselben Resultate gelangte Cayley[1]) auf einem ganz anderen Wege; er betrachtete die Parallelfläche als Ort der Endpunkte gleich langer Normalen.

Im Jahre 1862 nahm Fiedler[2]) seine Untersuchungen wieder auf und fügte als neues die Discussion der Gleichung der Parallelcurve der Ellipse hinzu; er fand, dass die Curve acht Doppelpunkte und zwölf Spitzen besass und dass ihre Klasse gleich vier sei. Nachdem auch von Cayley[3]) und Roberts[4]) die Parallelcurven von Kegelschnitten untersucht waren, veröffentlichte Letzterer[5]) im Jahre 1872 seine wichtigen Untersuchungen über die Parallelflächen der Flächen zweiten Grades. Er untersuchte zunächst die Gestalt und die Singularitäten der Parallelflächen, und fand, dass der unendlich ferne Kugelkreis, sowie der Schnitt der Originalfläche mit der unendlich fernen Ebene stets Doppellinien der Parallelfläche sind; die Hauptschnitte der Parallelfläche setzen sich zusammen aus den Parallelcurven der Hauptschnitte der Originalfläche und aus einem Kegelschnitt, der eine Doppellinie auf der Parallelfläche ist; ferner existiren auf der Parallelfläche noch eine

---

[1]) Annali di Matematica. III.
[2]) Grunert's Archiv, Bd. 39. 1862.
[3]) Quarterly Journal XI.
[4]) Quarterly Journal XII.
[5]) Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. IV.

Anzahl von Doppelgeraden. Als Cuspidallinie der Fläche fand Roberts ihren Schnitt mit der Fläche der Centra der Originalfläche, und als stationäre Punkte die Schnittpunkte der Cuspidallinie mit den erwähnten Doppelgeraden; er führte die Untersuchungen gleichmässig für alle Flächen zweiten Grades durch. Dann zu den Reciprokalflächen dieser Flächen übergehend, brachte Roberts eine eingehende Theorie der Charactere; er findet, dass die Parallelfläche der centrischen Flächen den Grad 12, die der nicht centrischen den Grad 10 hat. Eine Verallgemeinerung der Resultate für algebraische Flächen $n^{ter}$ Ordnung brachte er dann in seiner Arbeit aus dem Jahre 1873[1]).

Im Jahre 1882 erschien eine Arbeit von Craig[2]), die in wesentlich anderer Weise das Problem der Parallelfläche behandelte, nämlich mit Hülfe der Gauss'schen Parameterdarstellung. Craig untersuchte die Parallelfläche des Ellipsoids, nahm die Krümmungslinien derselben als Coordinatencurven an und wies eine Reihe von Beziehungen nach, die zwischen den Gauss'schen Grössen des Ellipsoids und denen der Parallelfläche bestehen; dann zur Theorie der Krümmung übergehend, bewies er streng analytisch den Satz von der Correspondenz der Krümmungslinien und fand schliesslich die für die Quadratur der Fläche überaus wichtige Formel

$$\frac{dS}{d\Sigma} = 1 + \rho H + \rho^2 K,$$

wo $dS$ das Flächenelement der Parallelfläche, $d\Sigma$ das der Originalfläche, $H$ das mittlere und $K$ das

[1]) Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. IV
[2]) Crelles Journal, Bd. 93. 94.

Gauss'sche Krümmungsmass der Originalfläche bedeuten. Es ist leicht einzusehen, dass diese Formel auch für die Cubatur der Fläche von Bedeutung ist, insofern sie das Volumen der Schale zwischen Originalfläche und Parallelfläche liefert gleich

$$\rho\Sigma + \frac{\rho^2}{2}\int H d\Sigma + \frac{\rho^3}{3}\int K d\Sigma$$

Es sind diese Formeln Erweiterungen der von Cauchy und Breton für die Ebene bereits gegebenen.

Erwähnt seien zum Schlusse noch zwei Arbeiten, die zwei specielle Parallelflächen behandeln. Neumann[1]) veröffentlichte 1878 eine Untersuchung der Parallelfläche des Ellipsoids; er fand die von Roberts abgeleiteten Hauptschnitte und die Cuspidallinie; als neues fügte er jedoch eine Parameterdarstellung und die Quadratur und Cubatur der Fläche hinzu. Schulze[2]) veröffentlichte 1886 eine Untersuchung über die Parallelfläche des Paraboloids; er untersuchte ebenfalls die Singularitäten, dann in Craigscher Weise die Krümmung, und schliesslich die Reciprocalfläche.

Es sind dies im Wesentlichen die Resultate, die meines Wissens bisher für die Parallelflächen der Flächen zweiten Grades gefunden sind. Die vorliegende Arbeit fügt einiges Neue hinzu. Sie behandelt die Parallelflächen der centrischen und nicht centrischen Flächen gleichmässig und beschäftigt sich in ihrem ersten Theil mit den Krümmungslinien auf der Parallelfläche; dieselben werden als

---

[1]) Neumann, Untersuchungen über die Parallelfläche des Elipsoids. Dissert. Halle 1878.

[2]) Schulze, Ueber die Parallelfläche des elliptischen Paraboloids. Dissert. Halle 1886.

Curven doppelter Krümmung für sich untersucht, ihre Charactere und ihre Constructionen werden angegeben. Der zweite Theil behandelt das Problem der Geraden und untersucht, wie viele und welche Gerade auf der Parallelfläche möglich sind; es ergeben sich die von Roberts zuerst gefundenen Doppelgeraden. Der dritte Theil enthält die Behandlung der Singularitäten in neuer Art. Die Einführung eines geeigneten Coordinatensystems ermöglicht es, die Geraden als Doppelgerade in einfacher Weise zu erkennen.

Die vorliegende Arbeit ist zum wesentlichen Theile im mathematischen Seminar entstanden, dessen Mitglied der Verfasser vom Sommer 1887 ab war; dabei kann ich nicht umhin, des regen Interesses zu gedenken, das der Leiter des Seminars, Herr Professor Dr. Krause, den nachstehenden Untersuchungen zuwandte; es sei mir deshalb gestattet, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer meinen ehrerbietigen Dank auszusprechen.

# Erster Abschnitt.

## Die Krümmungslinien auf der Parallelfläche.

---

### § 1.

### Die Charactere der Krümmungslinien auf Parallelflächen von Centralflächen zweiten Grades.

Zur Aufstellung der Charactere für eine doppelt gekrümmte Curve genügt es, nur eine bestimmte Anzahl derselben aufzusuchen, da sich die übrigen mit Hülfe der Cayley-Plücker'schen[1]) Formeln berechnen lassen. Bezeichnet man mit

$\mu$ die Ordnung einer ebenen Curve,
$\nu$ ihre Klasse,
$\delta$ die Zahl ihrer Doppelpunkte,
$\tau$ die Zahl ihrer Doppeltangenten,
$\varkappa$ die Zahl ihrer Cuspidalpunkte,
$\iota$ die Zahl ihrer Inflexionspunkte,

so finden nach Plücker zwischen diesen Grössen die folgenden Beziehungen statt:

---

[1]) Der erste Theil der nachfolgenden Untersuchungen ist nach Salmon, Raum II, §§ 88 f., angestellt; die dort gebrauchten Bezeichungen sind aufgenommen.

$$\nu = \mu(\mu - 1) - 2\delta - 3\varkappa$$
$$\mu = \nu(\nu - 1) - 2\tau - 3\iota$$
$$\tau = 3\mu(\mu - 2) - 6\delta - 8\varkappa$$
$$\varkappa = 3\nu(\nu - 2) - 6\tau - 8\iota.$$

Cayley betrachtet nun, um zu ähnlichen Formeln für die Raumcurven zu gelangen, die abwickelbare Fläche der Raumcurve, d. h. den Ort ihrer Tangenten. Er nennt die Punkte der Raumcurve „Punkte des Systems", ihre Tangenten „Linien des Systems", ihre Schmiegungsebenen „Ebenen des Systems". Es sei m die Zahl der Punkte des Systems, die in einer Ebene liegen, d. h. die Ordnung des Systems, n die Zahl der Ebenen des Systems, die durch einen Punkt gehen, d. h. die Klasse des Systems, r die Zahl der Linien des Systems, die durch eine Gerade gehen, d. h. der Rang des Systems. Es sei ferner $\alpha$ die Zahl der stationären Ebenen des Systems, das sind solche Ebenen, in denen zwei auf einander folgende Ebenen coincidiren; $\beta$ die Zahl der stationären Punkte des Systems, das sind solche Punkte, durch die vier auf einander folgende Ebenen des Systems gehen; $\Theta$ die Zahl der stationären Erzeugenden, das sind solche Erzeugende, durch die drei auf einander folgende Ebenen des Systems gehen. Es sei x die Zahl der Punkte in zwei Linien, die in einer Ebene liegen, und y die Zahl der Ebenen durch zwei Linien, die durch einen Punkt gehen; es sei g die Zahl der Linien in zwei Ebenen, die in einer willkürlichen Ebene liegen, und h die Zahl der Linien durch zwei Punkte, die durch einen willkürlichen Punkt gehen, d. h. die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte. Schliesslich sei D die Zahl der wirklichen Doppelpunkte der Raumcurve, $\Delta$ die Zahl der Doppelebenen, d die Zahl der Doppellinien.

Legt man nun durch die abwickelbare Fläche der Raumcurve einen beliebigen ebenen Schnitt, so ist offenbar für diese Schnittcurve

$$\mu = r \qquad \nu = n \qquad \delta = x + d$$
$$\tau = g + \Delta \quad \varkappa = m + \Theta \quad \iota = \alpha,$$

und durch Einsetzen dieser Werthe in die obigen Plücker'schen Formeln erhält man:

$$n = r(r-1) - 2(x+d) - 3(m+\Theta)$$
$$r = n(n-1) - 2(g+\Delta) - 3\alpha$$
$$\alpha = 3r(r-2) - 6(x+d) - 8(m+\Theta)$$
$$m + \Theta = 3n(n-2) - 6(g+\Delta) - 8\alpha.$$

Ein anderes System von Gleichungen erhält man durch Betrachtung des Kegels, den man über der Raumcurve als Leitlinie durch einen beliebigen Punkt als Spitze beschreibt. Für die Charactere eines ebenen Schnitts dieses Kegels hat man dann die Werthe

$$\mu = m \qquad \nu = r \qquad \delta = h + D$$
$$\tau = y + d \quad \varkappa = \beta \qquad \iota = n + \Theta,$$

und diese Werthe in die Plücker'schen Formeln eingesetzt ergeben:

$$r = m(m-1) - 2(h+D) - 3\beta$$
$$m = r(r-1) - 2(y+d) - 3(n+\Theta)$$
$$n + \Theta = 3m(m-2) - 6(h+D) - 8\beta$$
$$\beta = 3r(r-2) - 6(y+d) - 8(n+\Theta).$$

Es sind somit im Ganzen acht Beziehungen hergeleitet, die zwischen den Singularitäten einer Raumcurve bestehen.

Nach Craig entspricht nun jeder Krümmungslinie der Originalfläche eine Krümmungslinie der Parallelfläche, und zwar sind in entsprechenden Punkten die Tangenten parallel. Hieraus folgt, dass der Rang der Krümmungslinie der Parallelfläche das Doppelte ist von dem Rang der

Krümmungslinie der Originalfläche. Denn der Rang ist gleich der Zahl der Tangenten, die parallel einer Ebene laufen; laufen nun einer Ebene n Tangenten der Originalcurve parallel, so laufen ihr nach dem Satze von der Correspondenz der Krümmungslinien 2n Tangenten der Parallelkrümmungslinie parallel. und damit ist die Richtigkeit der Behauptung bewiesen.

Da die Schmiegungsebene einer Curve durch zwei benachbarte Tangenten geht, und im vorliegenden Falle der Krümmungslinien die Tangenten in entsprechenden Punkten parallel sind. so folgt, dass auch die Schmiegungsebenen in entsprechenden Punkten parallel sind. Die analytische Bestätigung dieses Satzes ist leicht. Bezeichnet man die laufenden Coordinaten der Originalfläche mit $\xi\eta\zeta$. die der Parallelfläche mit xyz, so ist

$$x = \xi + \rho\lambda \qquad y = \eta + \rho\mu \qquad z = \zeta + \rho\nu,$$

wo $\lambda\mu\nu$ die Richtungscosinus der Normalen sind. Es seien $\xi\eta\zeta$ Funktionen der Parameter u, v und zwar derart, dass die Curven u = const und v = const Krümmungslinien auf der Originalfläche sind. Man bezeichne mit Gauss:

$$A \quad \frac{d\eta}{du}\frac{d\zeta}{dv} - \frac{d\zeta}{du}\frac{d\eta}{dv} \qquad E = \Sigma\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 \qquad E^1 = \Sigma A\frac{d^2\xi}{du^2}$$

$$B \quad \frac{d\zeta}{du}\frac{d\xi}{dv} - \frac{d\xi}{du}\frac{d\zeta}{dv} \qquad F = \Sigma\frac{d\xi}{du}\frac{d\xi}{dv} \qquad F^1 = \Sigma A\frac{d^2\xi}{dudv}$$

$$C = \frac{d\xi}{du}\frac{d\eta}{dv} - \frac{d\eta}{du}\frac{d\xi}{dv} \qquad G = \Sigma\left(\frac{d\xi}{dv}\right)^2 \qquad G^1 = \Sigma A\frac{d^2\xi}{dv^2}$$

so ist nach Voraussetzung $F = F^1 = 0$. Es soll nun nachgewiesen werden, dass die Schmiegungsebenen der Krümmungslinien u const der Originalfläche und Parallelfläche in entsprechenden Punkten parallel sind. Bezeichnet man:

$$P \quad \frac{d\eta}{dv}\frac{d^2\zeta}{dv^2} - \frac{d\zeta}{dv}\frac{d^2\eta}{dv^2}$$

$$Q \quad \frac{d\zeta}{dv}\frac{d^2\xi}{dv^2} - \frac{d\xi}{dv}\frac{d^2\eta}{dv^2}$$

$$R \quad \frac{d\xi}{dv}\frac{d^2\eta}{dv^2} - \frac{d\eta}{dv}\frac{d^2\xi}{dv^2},$$

so sind PQR den Stellungscosinus der Schmiegungsebene der Originalkrümmungslinie proportional; die entsprechenden Grössen für xyz nenne man $P^1Q^1R^1$, alsdann ist nachzuweisen, dass

$$P : Q : R = P^1 : Q^1 : R^1$$

ist. Man hat

$$\frac{dx}{dv} = \frac{d\xi}{dv} + \rho\frac{d\lambda}{dv} = \frac{d\xi}{dv}\Gamma$$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{d\eta}{dv} + \rho\frac{d\mu}{dv} = \frac{d\eta}{dv}\Gamma$$

$$\frac{dz}{dv} = \frac{d\zeta}{dv} + \rho\frac{d\nu}{dv} = \frac{d\zeta}{dv}\Gamma,$$

Relationen, deren Richtigkeit aus der Parallelität entsprechender Tangenten hervorgeht, und die Craig (Crelle, Bd. 94, pag. 167) analytisch hergeleitet hat. Hieraus folgt:

$$\frac{d^2x}{dv^2} = \Gamma\frac{d^2\xi}{dv^2} + \frac{d\xi}{dv}\frac{d\Gamma}{dv}$$

$$\frac{d^2y}{dv^2} = \Gamma\frac{d^2\eta}{dv^2} + \frac{d\eta}{dv}\frac{d\Gamma}{dv}$$

$$\frac{d^2z}{dv^2} = \Gamma\frac{d^2\zeta}{dv^2} + \frac{d\zeta}{dv}\frac{d\Gamma}{dv},$$

mithin

$$P^1 = \Gamma\frac{d\eta}{dv}\left(\Gamma\frac{d^2\zeta}{dv^2} + \frac{d\zeta}{dv}\frac{d\Gamma}{dv}\right) - \Gamma\frac{d\zeta}{dv}\left(\Gamma\frac{d^2\eta}{dv^2} + \frac{d\eta}{dv}\frac{d\Gamma}{dv}\right)$$

$$= \Gamma^2 P,$$

ebenso

$$Q^1 = \Gamma^2 Q$$

$$R^1 = \Gamma^2 R;$$

somit ist die Richtigkeit der Behauptung bewiesen.

Die Klasse einer Curve kann man nun definiren als die Anzahl der Schmiegungsebenen, die einer beliebigen Geraden parallel sind. Hieraus folgt, mit Hinzunahme des soeben abgeleiteten Resultats, dass die Klasse der Krümmungslinie der Parallelfläche das Doppelte ist von der Klasse der Krümmungslinie der Originalfläche.

Zugleich ersieht man, dass die Zahlen der stationären Erzeugenden und stationären Ebenen mindestens das Doppelte der entsprechenden Zahlen bei der Originalkrümmungslinie sind; wohl aber können andere Zahlen hinzutreten, die von der Natur des oben genannten Factors

$$\Gamma = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}^3} EG^1$$

abhängen.

Die Charactere der Krümmungslinien der Parallelflächen sollen nun unter der Voraussetzung aufgestellt werden, dass die Charactere der Krümmungslinien der Centralfläche bereits bekannt sind. Die Krümmungslinien der Centralfläche

$$\frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b} + \frac{\zeta^2}{c} = 1$$

sind bekanntlich die totalen Durchschnitte der Fläche mit den confocalen Flächenschaaren

$$\frac{\xi^2}{a+u} + \frac{\eta^2}{b+u} + \frac{\zeta^2}{c+u} = 1$$
$$\frac{\xi^2}{a+v} + \frac{\eta^2}{b+v} + \frac{\zeta^2}{c+v} = 1,$$

für variable u und v; da aber die Centralfläche eine ihr confocale Fläche nie berührt, in allen gemeinsamen Punkten vielmehr orthogonal schneidet, so folgen für die Charactere der Durchschnittscurve beider

Flächen, d. h. für die Charactere der Krümmungslinie der Centralfläche die Werthe[1])

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $m = 4$ | $n = 12$ | $r = 8$ | $\alpha = 16$ | $\beta = 0$ |
| $x = 16$ | $y = 8$ | $g = 38$ | $h = 2$ | $\theta = 0$ |
| | $D = 0$ | $d = 0$ | $\Delta = 0$ | |

Berechnet man aus den obigen drei Gleichungen die Grössen $\xi\eta\zeta$, so folgt

$$\xi = \sqrt{\frac{a \cdot a + u \cdot a + v}{-\beta\gamma}}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{b \cdot b + u \cdot b + v}{-\gamma\alpha}}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{c \cdot c + u \cdot c + v}{-\alpha\beta}},$$

wo bedeutet:

$$\alpha = b - c \qquad \beta = c - a \qquad \gamma = a - b.$$

Es ist dies eine Parameterdarstellung der gegebenen Fläche; die Curvenschaaren $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ sind nach obigem dann die beiden Schaaren von Krümmungslinien auf der Centralfläche. Stellt man ferner mit Hülfe dieser Parameterdarstellung die Gleichung der Parallelfläche vom Modul $\rho$ auf, so lautet dieselbe nach Craig:

$$x = \sqrt{\frac{a \cdot a + u \cdot a + v}{-\beta\gamma}} \left(1 + \frac{\rho}{a}\sqrt{\frac{abc}{uv}}\right)$$

$$y = \sqrt{\frac{b \cdot b + u \cdot b + v}{-\gamma\alpha}} \left(1 + \frac{\rho}{b}\sqrt{\frac{abc}{uv}}\right)$$

$$z = \sqrt{\frac{b \cdot c + u \cdot c + v}{-\alpha\beta}} \left(1 + \frac{\rho}{c}\sqrt{\frac{abc}{uv}}\right),$$

und die Curvenschaaren $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ auf der

[1]) Salmon-Fiedler, Raum II, Art. 110.

Parallelfläche sind diejenigen Curvenschaaren, die den Schaaren u = const, v = const auf der Centralfläche entsprechen; letztere waren aber Krümmungslinien auf der Centralfläche; mithin sind nach dem Satze von der Correspondenz der Krümmungslinien erstere Krümmungslinien auf der Parallelfläche.

Das System der letzten drei Gleichungen giebt hiernach eine Parameterdarstellung für die Krümmungslinie der Parallelfläche. Um die Ordnung $m_1$ einer Krümmungslinie zu untersuchen, bestimme man die Zahl ihrer Schnittpunkte mit einer willkürlichen Ebene, z. B. der Ebene $z = 0$. Die Krümmungslinie $u = u_0$ schneidet die Ebene $z = 0$ da, wo entweder

$$c + v = 0 \qquad \text{oder} \qquad 1 + \frac{\rho}{c}\sqrt{\frac{abc}{u_0 v}} = 0$$

ist. Wie man nun aus den Gleichungen

$$x = \sqrt{\frac{a \cdot a + u_0 \cdot a + v}{-\beta\gamma}}\left(1 \frac{\rho}{a}\sqrt{\frac{abc}{u_0 v}}\right)$$

$$y = \sqrt{\frac{b \cdot b + u_0 \cdot b + v}{-\gamma\alpha}}\left(1 \frac{\rho}{b}\sqrt{\frac{abc}{u_0 v}}\right)$$

ersieht, entsprechen für negative $\rho$ dem Werthe $v = -c$ zwei Werthe x und zwei Werthe y, d. s. vier Schnittpunkte in der Ebene $z = 0$; dasselbe gilt für positive $\rho$. Dem Werthe

$$v = \frac{ab\rho^2}{cu_0}$$

entsprechen zwei Werthe x und zwei Werthe y, d. s. vier Schnittpunkte in der Ebene $z = 0$; dieselben sind aber Doppelpunkte. Im ganzen hat die Ebene $z = 0$ also 16 Punkte mit der Krümmungslinie $u = u_0$ gemein, und deshalb ist die Ordnung $m_1 = 16$.

Eine Bestätigung dieses Resultats liefert die folgende Ueberlegung. Legt man durch die Krümmungslinie $u = u_0$ eine Ebene $z = z_0$, so giebt es vier Parameterwerthe v, die den Schnittpunkten der Krümmungslinie mit dieser Ebene entsprechen; dieselben werden definirt durch die Gleichung

$$\left(\frac{\alpha\beta z_0^2}{c + u_0 \cdot c + v} + c + \rho^2 \frac{ab}{u_0 v}\right)^2 = 4\rho^2 \frac{abc}{u_0 v},$$

wobei zu bemerken ist, dass in dieser Gleichung $z_0$ und $\rho$ nur in der zweiten Potenz auftreten. Den vier Werthen u entsprechen auf der Centralfläche 32 Punkte, die symmetrisch zum Centrum liegen. Betrachtet man nun acht dieser Punkte, die einem Werthe u zugeordnet sind, und errichtet in ihnen die Normalen, so ist ersichtlich, dass vier solche Normalen von der Ebene $z = z_0$ im Abstande $\rho$, vier andere im Abstande $\rho$ von der Ebene $z = -z_0$ geschnitten werden. Jedem Werthe u entsprechen somit vier Schnittpunkte der Krümmungslinie mit der Ebene $z = z_0$. Mithin hat man in Summa 16 Schnittpunkte; es ist $m_1 = 16$.

Es stimmt dieses Resultat auch mit dem überein, das sich durch die Betrachtung des Hauptschnitts ergiebt. Die Hauptschnitte der Centralfläche sind Krümmungslinien, und zählen im Netz der Krümmungslinien als Doppellinien; ihre Parallelcurven sind ebenfalls Krümmungslinien; als Parallelcurven sind sie vom Grade 8; doppelt gezählt ergiebt sich ebenfalls $m_1 = 16$.

Nach dem bereits gesagten ist für diesen Fall die Klasse der Krümmungslinie gleich 24, ihr Rang gleich 16.

Auch die Zahl $\beta_1$ der stationären Punkte der Krümmungslinie lässt sich bestimmen. Die An-

wendung der Criterien eines stationären Punktes für die Krümmungslinie führt zu der Gleichung:

$$u_0 v^3 = \rho^2 abc;$$

da aber der Krümmungsradius der Krümmungslinie den Werth

$$R = \frac{v\sqrt{u_0 v}}{\sqrt{abc}}$$

hat, und da die Linie $R = +\rho$ ein Theil der Cuspidallinie der Parallelfläche ist, so folgt, dass die Krümmungslinie da stationäre Punkte hat, wo sie die Cuspidallinie schneidet. Die obige Gleichung definirt drei Werthe v, mithin 24 Punkte auf der Centralfläche. In jedem dieser Punkte ist entweder $R = +\rho$ oder $R = -\rho$, d. h. jedem Punkte entspricht nur ein stationärer Punkt der Krümmungslinie, und daher ist $\beta_1 = 24$.

Mit den hier aufgeführten Singularitäten und Characteren sollen die fehlenden berechnet werden. Die folgende Tabelle enthält die Resultate; auch sind die entsprechenden Werthe für die Charactere der Krümmungslinien der Centralflächen eingetragen:

| Character | Formel | Centralfläche | Parallelfläche |
|---|---|---|---|
| m | | 4 | 16 |
| n | | 12 | 24 |
| r | | 8 | 16 |
| $\beta$ | | 0 | 24 |
| $\Theta$ | $\Theta = 3(r-m)+\beta-n$ | 0 | 0 |
| $\alpha$ | $\alpha = -3(r-n)+m+\Theta$ | 16 | 40 |
| h+D | $2(h+D) = m(m-1)-r-3\beta$ | 2 | 76 |
| x+d | $2(x+d) = r(r-1)-n-3(m+\Theta)$ | 16 | 84 |
| y+d | $2(y+d) = r(r-1)-m-3(n+\Theta)$ | 8 | 76 |
| g+$\Delta$ | $2(g+\Delta) = n(n-1)-r-3\alpha$ | 38 | 208 |

Das Geschlecht[1]) einer Raumcurve wird angegeben durch

$$p = \frac{1}{2}(r-2m+2+\beta);$$

mithin ist das Geschlecht der Krümmungslinie gleich 5[2]).

---

[1]) cf. Salmon-Fiedler, Raum II, Art. 499.

[2]) Percival Frost hat im Quarterley Journal Band X (1870) das Verhalten der Krümmungslinien des Ellipsoids zu den acht ausgezeichneten Geraden des Ellipsoids untersucht; die Arbeit ist für die Theorie der Parallelflächen von Bedeutung, da sich die Resultate unmittelbar übertragen lassen; als Hauptresultat kann man hinstellen: Die 16 imaginären Doppelgeraden der Parallelfläche sind die Enveloppen der beiden Schaaren von Krümmungslinien. In demselben Aufsatz wird auch der Lauf der Krümmungslinien in der Nähe der Nabelpunkte untersucht: die Resultate sind auch hier unmittelbar übertragbar. Ueber den letzten Punkt cf. auch R. Hoppe, Grunert's Archiv, Bd. 70, 1883.

§ 2.

**Die Charactere der Krümmungslinien der nicht centrischen Parallelflächen.**

Ist die Gleichung eines Paraboloids

$$\frac{\xi^2}{a}+\frac{\eta^2}{b}=\zeta,$$

so schneiden die Paraboloide

$$\frac{\xi^2}{a+u}+\frac{\eta^2}{b+u}=\zeta+u$$
$$\frac{\xi^2}{a+v}+\frac{\eta^2}{b+v}=\zeta+v$$

dasselbe und sich gegenseitig orthogonal, schneiden also Krümmungslinien aus. Durch jeden Punkt des Paraboloids lässt sich ein Paraboloid $u=\text{const}$ und ein anderes $v=\text{const}$ legen; denn löst man die drei obigen Gleichungen nach $\xi\eta\zeta$ auf, so ist

$$\xi^2=\frac{a\cdot a+u\cdot a+v}{b-a}$$
$$\eta^2=\frac{b\cdot b+u\cdot b+v}{a-b}$$
$$\zeta=-(a+b+u+v),$$

und wie leicht ersichtlich, lassen sich u und v stets so bestimmen, dass für $\xi^2$ und $\eta^2$ sich positive Werthe ergeben. Das letzte System von Gleichungen lässt sich aber auch ansehen als eine Parameterdarstellung für das obige Paraboloid; die Curven $u=\text{const}$ und $v=\text{const}$ bedeuten dann die beiden Schaaren von Krümmungslinien.

Mit Hülfe dieser Parameterdarstellung lässt sich eine Gleichung der Pararallelfläche herleiten. Es ist

$$\frac{d\xi}{du}=\frac{1}{2\xi}\frac{a\cdot a+v}{b-a} \qquad \frac{d\xi}{dv}=\frac{1}{2\xi}\frac{a\cdot a+u}{b-a}$$

$$\frac{d\eta}{du}=\frac{1}{2\eta}\frac{b\cdot b+v}{a-b} \qquad \frac{d\eta}{dv}=\frac{1}{2\eta}\frac{b\cdot b+u}{a-b}$$

$$\frac{d\zeta}{du}=-1 \qquad \frac{d\zeta}{dv}=-1,$$

also hat man für die Gauss'schen Grössen die Werthe

$$A=\frac{d\eta}{du}\frac{d\zeta}{dv}-\frac{d\zeta}{du}\frac{d\eta}{dv}=\frac{(u-v)b}{2\eta(a-b)}$$

$$B=\frac{d\zeta}{du}\frac{d\xi}{dv}-\frac{d\xi}{du}\frac{d\zeta}{dv}=\frac{(v-u)a}{2\xi(b-a)}$$

$$C=\frac{d\xi}{du}\frac{d\eta}{dv}-\frac{d\eta}{du}\frac{d\zeta}{dv}=-ab\frac{u-v}{4\xi\eta(a-b)}.$$

Nach einigen Vereinfachungen erhält man:

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\frac{1}{4\xi\eta}\frac{u-v}{a-b}\sqrt{4abuv-3a^2b^2}.$$

Aus diesen Daten findet man die Gleichung der Parallelfläche in der Form:

$$x=\sqrt{\frac{a\cdot a+u\cdot a+v}{b-a}}\left(1+\rho\cdot\frac{2b}{\sqrt{4abuv-3a^2b^2}}\right)$$

$$y=\sqrt{\frac{b\cdot b+u\cdot b+v}{a-b}}\left(1+\rho\frac{2a}{\sqrt{4abuv-3a^2b^2}}\right)$$

$$z=-(a+b+u+v)-\rho\frac{ab}{\sqrt{4abuv-3a^2b^2}}.$$

Da die Krümmungslinien der Parallelfläche denen des Paraboloids entsprechen, so sind in diesen Gleichungen $u=\text{const}$ und $v=\text{const}$ äquivalent den beiden Schaaren von Krümmungslinien auf der Parallelfläche.

Um nun den Grad $m_1$ der Krümmungslinie der Parallelfläche eines Paraboloids zu erhalten, bestimmt man die Zahl ihrer Schnittpunkte mit einer

willkürlichen Ebene, z. B. der Ebene $z = 0$. Es wird $z = 0$ für

$$(a + b + u_0 + v)^2 . (4abu_0v - 3a^2b^2) = \rho^2 a^2 b^2,$$

d. i. eine Gleichung dritten Grades in v. In diesem Falle wird

$$x = \sqrt{\frac{a \cdot a + u \cdot a + v}{b - a}} \left(1 - 2\frac{a + b + u + v}{a}\right)$$

$$y = \sqrt{\frac{b \cdot b + u \cdot b + v}{a - b}} \left(1 - 2\frac{a + b + u + v}{b}\right),$$

woraus man sieht, dass jedem Werthe von v je zwei Werthe von x und y entsprechen, d. h. vier Schnittpunkte in der Ebene $z = 0$. Nun waren in Summa drei Werthe v möglich; daraus folgt, dass die Krümmungslinie die Ebene $z = 0$ in 12 Punkten schneidet, ihre Ordnung $m_1$ also gleich 12 ist.

Die Klasse $n_1$ der Krümmungslinie ist nach den Erörterungen im vorigen § gleich dem Doppelten der Klasse der Krümmungslinie der Originalfläche in diesem Falle also gleich 12. Ebenso ist in diesem Falle der Rang gleich 12.

Die stationären Punkte ergeben sich wie im vorigen § als Schnittpunkte der Krümmungslinie $u = u_0$ mit der Cuspidallinie der Fläche, sie sind also definirt durch

$$4a^2b^2(u_0 - v)^2\rho^2 = [ab + u_0(a + b) + u_0v + 4(a + u_0)(b + u_0)]^2 (4abu_0v - 3a^2b^2),$$

und diese Gleichung definirt drei Werthe v, mithin 12 Punkte auf der Originalfläche. Da aber jedem dieser Punkte auf der Parallelfläche nur ein Punkt entspricht, der der Cuspidallinie angehört, so folgt $\beta_1 = 12$.

Die hier aufgezählten Charactere reichen zur Berechnung der übrigen hin. Die folgende Tabelle

enthält die Zusammenstellung der Charactere der Krümmungslinien eines Paraboloids und seiner Parallelfläche, dabei ist zu bemerken, dass die Krümmungslinien eines Paraboloids aufzufassen sind als totale Durchschnitte zweier Flächen zweiten Grades, die sich in einem Punkt berühren[1]):

| Character | Formel | Paraboloid | Parallel-fläche |
|---|---|---|---|
| m | | 4 | 12 |
| n | | 6 | 12 |
| r | | 6 | 12 |
| $\beta$ | | 0 | 12 |
| $\theta$ | $\theta = 3(r - m) + \beta - n$ | 0 | 0 |
| $\alpha$ | $\alpha = 3(n - r) + m + \theta$ | 4 | 12 |
| h+D | $2(h + D) = m(m - 1) - r - 3\beta$ | 3 | 42 |
| x + d | $2(x + d) = r(r - 1) - n - 3(m + \theta)$ | 6 | 42 |
| y + d | $2(y + d) = r(r - 1) - m - 3(n + \theta)$ | 4 | 42 |
| g + $\Delta$ | $2(g + \Delta) = n(n - 1) - r - 3\alpha$ | 6 | 42 |

Das Geschlecht der Krümmungslinie ist hiernach:

$$p = \frac{1}{2}(r - 2m + 2 + \beta) = 1,$$

während das der Originalkrümmungslinie gleich Null ist.

---

[1]) Salmon-Fiedler, Raum II, Art. 111.

## § 3.

### Eine geometrische Construction der Projectionen der Krümmungslinie der Parallelfläche einer Centralfläche.

Es sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die Gleichung der zu Grunde gelegten Centralfläche. dann sind die Projectionscurven der Krümmungslinien dieser Fläche auf die Hauptebenen Centralkegelschnitte, deren Halbaxen im Fall der XY Ebene nach Monge[1]) die laufenden Coordinaten einer Hülfsellipse

$$x^2 + \frac{a^2 \cdot a^2 - b^2}{a^2 - c^2} y^2 = b^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$$

sind. Diese Ellipse, deren Halbaxen also geometrisch construirbar sind, denke man sich gezeichnet, dann ist durch sie das Netz der Projectionscurven der Krümmungslinien in der XY Ebene definirt. Von diesen Curven sei eine,

$$\frac{x_1^2}{a^2} \frac{a^2 - c^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \frac{b^2 - c^2}{b^2 - \lambda^2} = 1$$

ausgewählt, und die Aufgabe ist dann, die dieser Curve entsprechende Curve geometrisch zu construiren.

Zur Lösung des Problems errichte man in dem Punkte der Centralfläche, der dem Punkte $P_1 = (x_1 y_1)$ der gegebenen Projectionscurve entspricht, eine Normale zur Fläche; ihre Gleichung ist

---

[1]) Monge, Applications de l'Analyse à la Géométrie, § XVI. cf. auch: R. Diesel, Die Construction der Krümmungslinien auf den Centralflächen zweiten Grades. Darmstadt 1878.

$$\frac{x - x_1}{x_1} a^2 = \frac{y - y_1}{y_1} b^2 = \frac{z - z_1}{z_1} c^2,$$

und die Gleichung ihrer Projection auf die XY Ebene

$$\frac{x - x_1}{x_1} a^2 = \frac{y - y_1}{y_1} b^2.$$

diese Gerade schneidet die XAxe im Punkte

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1,$$

d. h. in demselben Punkte, durch den die Normale der XYHauptellipse der Fläche im Punkte $x = x_1$ geht. Man findet somit die durch den Punkt $P_1$ gehende Projection der Flächennormale auf die XY Ebene durch folgende Construction: Man ziehe durch $P_1$ eine Parallele zur YAxe, die den Hauptschnitt der Centralfläche in E schneiden mag, errichte in E eine Normale zum Hauptschnitt, die die XAxe in N schneidet, und ziehe $P_1N$, alsdann ist dies die Projection der Flächennormale.

Weiter bestimme man den Schnittpunkt $P_2$ der Flächennormale mit der XY Ebene; man erhält die Coordinaten, falls man in

$$\frac{x - x_1}{x_1} a^2 = \frac{y - y_1}{y_1} b^2 = \frac{z - z_1}{z_1} c^2$$

$z = 0$ setzt; dann wird

$$x_2 = x_1 \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

$$y_2 = y_1 \frac{b^2 - c^2}{b^2},$$

es genügen aber $x_1$ und $y_1$ der Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a^2} \frac{a^2 - c^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \frac{b^2 - c^2}{b^2 - \lambda^2} = 1,$$

somit genügen $x_2$ und $y_2$ der Gleichung

$$x_2^2 \frac{a^2}{(a^2-c^2)(a^2-\lambda^2)} + y_2^2 \frac{b^2}{(b^2-c^2)(b^2-\lambda^2)} = 1,$$

d. h. die Schnittpunkte der XY Ebene mit den Flächennormalen, errichtet in den Punkten der oben definirten Krümmungslinie, liegen auf dem eben abgeleiteten Kegelschnitt. Denkt man sich diesen construirt, so ist sein Schnittpunkt $P_2$ mit $P_1N$ der Schnittpunkt der in Rede stehenden Flächennormalen mit der XY Ebene. Im Allgemeinen wird die Gerade $P_1N$ den Kegelschnitt in zwei Punkten schneiden, welcher von beiden Punkten der gesuchte Punkt $P_2$ ist, geht im vorgelegten Falle immer aus den Gleichungen

$$x_2 = x_1 \frac{a^2-c^2}{a^2}$$

$$y_2 = y_1 \frac{b^2-c^2}{b^2}$$

hervor.

Schliesslich soll noch das zum Punkte $P_1$ gehörige $z_1$ construirt werden. Es ist

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1$$

und

$$\frac{x_1^2}{a^2}\frac{a^2-c^2}{a^2-\lambda^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\frac{b^2-c^2}{b^2-\lambda^2} = 1;$$

eliminirt man aus beiden Gleichungen $y_1$, so wird

$$\frac{x_1^2}{a^2}\frac{a^2-b^2}{a^2-\lambda^2} + \frac{z_1^2}{c^2}\cdot\frac{b^2-c^2}{\lambda^2-c^2} = 1,$$

d. i. die Gleichung eines Centralkegelschnitts. Construirt man denselben, so hat man zu jedem $x_1$ das betreffende $z_1$ als Ordinate.

Errichtet man nun in $P_1$ auf $P_1N$ eine Senkrechte $P_1Q = z_1$, trägt auf $P_2Q$ die Strecken $QA = -\rho$ und $QA_1 = +\rho$ ab, und fällt

von A und $A_1$ die Lothe AF und $A_1F_1$ auf $P_1N$, so sind also F und $F_1$ die Punkte der Krümmungslinienprojection, die dem Punkte $P_1$ entsprechen. Lässt man $P_1$ auf seinem Kegelschnitt wandern, so erhält man eine Reihe von Punkten F und $F_1$, die sämmtlich der zu construirenden Projectionscurve angehören.

Man ist somit im Stande, die Projection der Krümmungslinie der Parallelfläche auf die XY Ebene, ebenso natürlich auf die beiden anderen Hauptebenen, punktweise zu construiren, falls man die im obigen beschriebenen Constructionen ausführen kann; dass dies aber der Fall ist, zeigt die projectivische Geometrie; man kann somit das Problem als gelöst betrachten.

## § 4.

### Eine geometrische Construction der Projectionen der Krümmungslinien der Parallelfläche eines Paraboloids.

Wie im vorigen § die Projectionen der Krümmungslinien von centrischen Flächen geometrisch construirt wurden, so lassen sich in analoger Weise die Projectionen der Krümmungslinien nicht-centrischer Parallelflächen construiren, jedoch nicht in allen drei Hauptebenen, sondern nur in den beiden durch die Axe des Paraboloids gehenden. Es soll im Folgenden die Construction in einer solchen Hauptebene angegeben werden.

Die Gleichung des zu Grunde gelegten Paraboloids sei

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=z,$$

alsdann wird eine Krümmungslinie erzeugt als totaler Durchschnitt des Paraboloids mit dem ihm confocalen Paraboloid

$$\frac{x^2}{a+u}+\frac{y^2}{b+u}=z+u,$$

und die Gleichung der Projection der Krümmungslinie auf die XZ Ebene ist:

$$\text{(I)} \qquad \frac{x_1^2}{a}\,\frac{a-b}{a+u}=z_1+b+u,$$

d. i. die Gleichung einer Parabel, man denke sich letztere construirt. In dem Punkte $P_1=(x_1y_1)$ dieser Parabel errichte man ein Loth auf die XZ Ebene, und im Schnittpunkt dieses Lothes mit dem Paraboloid die Normale, so ist ihre Gleichung

$$\frac{x-x_1}{2x_1}a+\frac{y-y_1}{2y_1}b=z_1-z$$

und die Projection dieser Normale auf die XZ Ebene schneidet die Z Axe in einem Punkte N, dessen Abstand vom Scheitel des Paraboloids

$$z=z_1+\frac{a}{2}$$

ist. Denkt man sich nun die Hauptparabel in der XZ Ebene construirt,

$$\text{(II)} \qquad x^2=az,$$

und construirt im Punkte $z_1$ die Normale, so schneidet diese die Z Axe in demselben Punkte wie die Projection der Flächennormale. Man hat für letztere somit die Construction: Man construire im Punkte $x_1$ der Hauptparabel II die Normale und verbinde ihren Schnittpunkt N in der Z Axe mit $P_1$, alsdann ist $P_1N$ die Projection der Flächennormale in der XZ Ebene.

Weiter bestimme man den Schnittpunkt $P_2$ der Flächennormale mit der XZ Ebene; die Coordinaten sind

$$x_2 = x_1 \frac{a-b}{a}$$

$$z_2 = z_1 + \frac{b}{2},$$

und da $x_1$ und $z_1$ der Gleichung (I) genügen, so ist der Ort der Punkte $P_2$ die Parabel

$$\text{(III)} \qquad x_2^2 \frac{a}{(a-b)(a+u)} = z_2 + u + \frac{b}{2};$$

der wirkliche Schnittpunkt der Flächennormale mit der XZ Ebene ist dann der Schnittpunkt dieser Parabel mit $P_1N$.

Um die Construction der Projectionscurve ausführen zu können, muss man schliesslich das zum Punkte $P_1$ gehörige $y_1$ noch geometrisch construiren. Auch dies ist möglich; denn man hat

$$x_1^2 \frac{a-b}{a(a+u)} = b + z_1 + u$$

und

$$z_1 = \frac{x_1^2}{a} + \frac{y_1^2}{b};$$

eliminirt man aus beiden Gleichungen $x_1$, so erhält man:

$$\text{(IV)} \qquad z_1 + y_1^2 \frac{a-b}{b+u} + a + u = 0$$

und man sieht, dass die gesuchten Grössen $y_1$ sich als Ordinaten einer Parabel darstellen lassen, mithin geometrisch construirbar sind.

Die wirkliche Construction eines Punktes der gesuchten Projectionscurve gestaltet sich mithin so: Man construire in der angegebenen Weise die Projection $P_1N$ der Flächennormale, errichte auf $P_1N$ in $P_1$ ein Loth $P_1Q = y_1$, ermittelt aus der Parabel IV, verbinde den Endpunkt Q mit dem nach III construir-

baren Punkt $P_2$, und trage auf $P_2Q$ von Q aus die Strecken $QA = -\rho$ und $QA_1 = +\rho$ ab; fällt man von A und $A_1$ auf $P_1N$ die Lothe AF und $A_1F_1$, so sind $F_1$ und $F_2$ die gesuchten Punkte der Projectionscurve, die dem Punkte $P_1$ entsprechen.

# Zweiter Abschnitt.

## Die Geraden auf der Parallelfläche.

### § 1.

### Die den erzeugenden Geraden einer Centralfläche zweiten Grades entsprechenden Curven auf der Parallelfläche.

Die ihrem Grade nach einfachsten Curven, die man auf den Flächen zweiter Ordnung ziehen kann, sind die reellen oder imaginären geraden Erzeugenden; ihnen entsprechen, wie sich in der Folge zeigen wird, Curven vierten Grades auf der Parallelfläche, und diese Curven eignen sich wegen ihrer Einfachheit zu Coordinatencurven der Fläche. Bevor jedoch an die Ableitung der Gleichung der Fläche gegangen wird, sollen einige Sätze abgeleitet werden, die auf die Gestalt der neuen Coordinatencurven schliessen lassen.

Die Fläche der Normalen längs einer Erzeugenden einer Regelfläche zweiter Ordnung ist eine Regelfläche zweiter Ordnung[1]). Denn schreitet man auf

[1]) cf. Salmon-Fiedler, Raum II, Art. 224 ff.

dieser Erzeugenden fort, und bildet in jedem Punkte die Tangentialebene der Fläche, so bilden diese ein Ebenenbüschel, das projectivisch ist der Punktreihe der Berührungspunkte. Die auf diesen Ebenen senkrechten Normalen bilden ebenfalls ein projectivisches Büschel, ihre Fläche ist somit eine Regelfläche zweiter Ordnung, und im Allgemeinen ein hyperbolisches Paraboloid, da alle Erzeugenden einer einzigen Ebene parallel sind.

Den Scheitel dieses hyperbolischen Paraboloids findet man durch die folgende Betrachtung. Das Büschel der Tangentialebenen der Normalenfläche in den Punkten der betrachteten Erzeugenden und das Büschel der dazu senkrechten Normalebenen, ebenfalls durch die Erzeugende gehend, sind projectivisch; daraus folgt, dass die Berührungspunkte einer sich um die Erzeugende drehenden Ebene, und die Punkte, in denen sie normal zur Fläche ist, eine Involution bilden. Das Centrum dieser Involution ist derjenige Punkt, in welchem diejenige Ebene durch die Erzeugende, welche die Fläche in unendlicher Ferne berührt, zu ihr normal steht, und dies ist der Scheitel des Paraboloids. Der Ort der Scheitel der Normalenparaboloide ist somit die Strictionslinie der Regelfläche.

Es lassen sich die Resultate auch analytisch herleiten. Es sei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

die Gleichung der gegebenen Centralfläche, dann ist

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}$$

die Gleichung einer Erzeugenden, und

$$(2) \qquad \frac{\xi - x}{x} a^2 = \frac{\eta - y}{y} b^2 = -\frac{\zeta - z}{z} c^2$$

die Gleichung der Normalen der Fläche im Punkte xyz. Zur Aufstellung der Gleichung der Fläche der Normalen längs jener Erzeugenden berechne man aus den Gleichungen (1) und (2) die Grösse y in doppelter Weise. Man erhält aus (2)

$$(3) \qquad \begin{aligned} x(b^2\eta - b_2 y + a^2 y) &= a^2 \xi y \\ z(b^2\eta - b^2 y - c^2 y) &= c^2 \zeta y, \end{aligned}$$

und aus (1) durch Addition und Subtraction

$$2\frac{x}{a} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$
$$2\frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{b}\right) - \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Setzt man hierin aus (3) die Werthe für x und z ein, so erhält man zwei Gleichungen in y, deren Resultante die Gleichung der Normalenfläche längs der Erzeugenden λ ist. Die Einsetzung ergiebt:

$$\frac{2a\xi y}{b^2\eta - b^2 y + a^2 y} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$
$$\frac{2c\zeta y}{b^2\eta - b^2 y - c^2 y} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) - \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{b}\right),$$

oder

$$2ab\lambda\xi y = (b^2\eta - b^2 y + a^2 y)(\lambda^2 b - \lambda^2 y + b + y)$$
$$2bc\lambda\zeta y = (b^2\eta - b^2 y - c^2 y)(\lambda^2 b - \lambda^2 y - b - y),$$

oder nach Potenzen von y geordnet:

$$y^2(a^2 - b^2)(1 - \lambda^2) - y[2ab\lambda\xi - (a^2 - b^2)(1 + \lambda^2)b - b^2\eta(1 - \lambda^2)] + b^3\eta(1 + \lambda^2) = 0$$
$$y^2(b^2 + c^2)(1 - \lambda^2) - y[2bc\lambda\zeta - (b^2 + c^2)(1 - \lambda^2)b + b^2\eta(1 + \lambda^2)] - b^3\eta(1 - \lambda^2) = 0.$$

Die Gleichung der Normalenfläche ist somit für

$$s^2 = b^2 + c^2$$
$$d^2 = a^2 - b^2$$

$$0 = \begin{vmatrix} d^2(1-\lambda^2) & -2ab\xi\lambda + d^2(1+\lambda^2)b + b^2\eta_1(1-\lambda^2) \\ 0 & d^2(1-\lambda^2) \\ s^2(1+\lambda^2) & -2bc\lambda\zeta + s^2(1-\lambda^2)b - b^2\eta_1(1+\lambda^2) \\ 0 & s^2(1+\lambda^2) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b^3\eta_1(1+\lambda^2) & 0 \\ -2ab\lambda\xi + d^2(1+\lambda^2)b + b^2\eta_1(1-\lambda^2) & (1+\lambda^2) \\ -b^3\eta_1(1-\lambda^2) & 0 \\ -2bc\lambda\zeta + s^2(1-\lambda^2)b - b^2\eta_1(1+\lambda^2) & (1-\lambda^2) \end{vmatrix}$$

Man multiplizire die zweite Reihe mit $(1-\lambda^2)$, die vierte mit $(1+\lambda^2)$, und addire die zweite zur vierten, dann ist:

$$0 = \begin{vmatrix} d^2(1-\lambda^2) & -2ab\xi\lambda + d^2(1+\lambda^2)b + b^2\eta_1(1-\lambda^2) \\ s^2(1+\lambda^2) & -2bc\zeta\lambda + s^2(1-\lambda^2)b - b^2\eta_1(1+\lambda^2) \\ 0 & d^2(1-\lambda^2)^2 + s^2(1+\lambda^2)^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b^3\eta_1(1+\lambda^2) \\ -b^3\eta_1(1-\lambda^2) \\ -2ab\xi(1-\lambda^2)\lambda - 2bc\zeta(1+\lambda^2)\lambda + (s^2+d^2)(1-\lambda^4)b - 4b^2\eta_1\lambda^2 \end{vmatrix}$$

Man multiplizire die erste Reihe mit $-s^2(1+\lambda^2)$, die zweite mit $d^2(1-\lambda^2)$, und addire die erste zur zweiten, dann wird:

$$0 = \begin{vmatrix} 2abs^2\xi(1+\lambda^2)\lambda - 2bcd^2\zeta(1-\lambda^2)\lambda - 4d^2s^2b\lambda^2 - b^2\eta_1(s^2+d^2)(1-\lambda^4) \\ d^2(1-\lambda^2)^2 + s^2(1+\lambda^2)^2 \\ -b^3\eta_1[s^2(1+\lambda^2)^2 + d^2(1-\lambda^2)^2] \\ -2ab\xi(1-\lambda^2)\lambda - 2bc\zeta(1+\lambda^2)\lambda + (s^2+d^2)(1-\lambda^4)b - 4b^2\eta_1\lambda^2 \end{vmatrix}$$

Dividirt man noch durch $b^2$, so kann man diese Gleichung schreiben:

$$0 = \begin{vmatrix} 2as^2\xi(1+\lambda^2)\lambda - 2cd^2\zeta(1-\lambda^2)\lambda - 4d^2s^2\lambda^2 - b\eta_1(s^2+d^2)(1-\lambda^4) \\ d^2(1-\lambda^2)^2 + s^2(1+\lambda^2)^2 \\ -b\eta_1[s^2(1+\lambda^2)^2 + d^2(1-\lambda^2)^2] \\ -2a\xi(1-\lambda^2)\lambda - 2c\zeta(1+\lambda^2)\lambda + (s^2+d^2)(1-\lambda^4) - 4b\eta_1\lambda^2 \end{vmatrix}$$

Da diese Gleichung vom zweiten Grade ist, so ist die Fläche der Normalen längs einer Erzeugenden vom zweiten Grade. Dieselbe wird aber erzeugt durch Gerade, die alle derselben Ebene parallel sind, ist somit ein hyperbolisches Paraboloid oder ein Cylinder. Ein gewöhnlicher Cylinder zweiten Grades kann sie aber nicht sein, denn ein solcher enthält ausser seinen Erzeugenden keine Gerade; die vorliegende Fläche enthält aber ausser den Erzeugenden (Normalen) noch mindestens eine Gerade, nämlich die zu Grunde gelegte Gerade auf der Centralfläche. Daraus folgt, dass die zu betrachtende Normalenfläche entweder ein hyperbolisches Paraboloid oder ein Paar von Ebenen ist, und zwar wird sie das erstere oder das letztere sein, je nachdem die Gleichungsdiscriminante von Null verschieden oder gleich Null ist.

Im allgemeinen Falle ist nun die Gleichungsdiscriminante von Null verschieden; die Normalenfläche ist somit ein Paraboloid, und zwar ein gleichseitiges; denn bildet man in der bekannten Bezeichnung die Grössen

$$a_{11} = -4a^2s^2\lambda^2(1-\lambda^4)$$
$$a_{22} = 4b^2(s^2+d^2)\lambda^2(1-\lambda^4)$$
$$a_{33} = 4c^2d^2\lambda^2(1-\lambda^4),$$

so ist

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=0,$$

d. h. das Normalenparaboloid ist gleichseitig.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass den Geraden auf der Centralfläche zweiten Grades auf der Parallelfläche Curven vierter Ordnung entsprechen; denn diese Curven entstehen als Ort der Endpunkte gleich langer Strecken, die man auf den

Normalen einer Centralfläche längs einer Erzeugenden abträgt, d. h. als totale Durchschnitte von Flächen zweiten Grades mit Kreiscylindern, deren Axen die betreffenden Erzeugenden sind. In den Untersuchungen des folgenden Abschnitts sollen diese Curven zu Coordinatencurven genommen werden.

Eine weitere Frage ist die, wann einer Geraden auf der Centralfläche wieder eine Gerade auf der Parallelfläche entspricht. Falls dies eintritt, liegen offenbar alle Normalen, als durch zwei parallele Gerade gehend, in einer Ebene; als hinreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass die Normalenfläche aus Ebenen besteht, war oben das Verschwinden der Gleichungsdiscriminante gefunden. Man kommt somit zu dem Resultat: Die hinreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass einer Geraden der Centralfläche eine Gerade der Parallelfläche entspricht, ist das Verschwinden der Discriminante der zuletzt aufgestellten Gleichung.

Die Coeffizienten $a_{11}$ $a_{22}$ $a_{33}$ in der Gleichung der Normalenfläche sind oben bereits angegeben; die übrigen sind:

$$a_{44} = -4d^2s^2S^2\lambda^2(1-\lambda^4)$$
$$2a_{12} = -8abs^2\lambda^2(1+\lambda^2)\lambda + 2ab\lambda S^2(1-\lambda^4)(1-\lambda^2)$$
$$2a_{13} = 4acd^2\lambda^2(1-\lambda^2)^2 - 4acs^2\lambda^2(1+\lambda^2)^2$$
$$2a_{23} = 2bcS^2\lambda(1-\lambda^4)(1+\lambda^2) + 8bcd^2\lambda^3(1-\lambda^2)$$
$$2a_{14} = 2as^2S^2\lambda(1+\lambda^2)(1-\lambda^4) + 8ad^2s^2\lambda^3(1-\lambda^2)$$
$$2a_{24} = bS^4(1-\lambda^4)^2 + 16bd^2s^2\lambda^4 + b[s^2(1+\lambda^2)^2 + d^2(1-\lambda^2)^2]^2$$
$$2a_{34} = -2cd^2S^2\lambda(1-\lambda^2)(1-\lambda^4) + 8cd^2s^2\lambda^3(1+\lambda^2),$$

wo zur Abkürzung

$$S^2 = s^2 + d^2$$

gesetzt ist. Bildet man nun aus diesen Ausdrücken die Discriminante, so ist dieselbe durch

$$16a^2b^2c^2\lambda^4$$

theilbar. Die übrig bleibende Determinante soll dann in der Weise umgeformt werden, dass sie ihren symmetrischen Aufbau behält. Jedoch setzen die folgenden Operationen voraus, dass $\lambda$, $\lambda^2+1$, $\lambda^2-1$ sämmtlich von Null verschieden sind, so dass diese Fälle eventuell für sich betrachtet werden müssen. Man multiplizire nun in der übrig bleibenden Determinante die zweite Reihe mit $[-s^2(1-\lambda^2)]$, die vierte mit $(1+\lambda^2)$, und addire sie zur zweiten, dasselbe mache man mit der zweiten und vierten Columne; dann wird die Determinante von der Form:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{31} \\ b_{14} & b_{24} & b_{34} & b_{41} \end{vmatrix}$$

wo gesetzt ist:

$$b_{11} = -2s^2(1-\lambda^4)$$
$$b_{12} = 8s^2(1-\lambda^4)S^2\lambda^2$$
$$b_{13} = d^2(1-\lambda^2)^2 - s^2(1+\lambda^2)^2$$
$$b_{14} = s^2(1-\lambda^2)[S^2(1+\lambda^2)^2 + 4d^2\lambda^2]$$
$$b_{23} = -S^4(1-\lambda^4)^2 + 16s^2d^2\lambda^4$$
$$b_{24} = -4s^2S^2\lambda^2(1-\lambda^2)[S^2(1+\lambda^2)^2 + 4d^2\lambda^2]$$
$$b_{33} = 2d^2(1-\lambda^4)$$
$$b_{34} = d^2(1+\lambda^2)[4s^2\lambda^2 - S^2(1-\lambda^2)^2]$$
$$b_{44} = -8s^2S^2d^2\lambda^2(1-\lambda^4).$$

Man multiplizire die erste Reihe mit $4S^2\lambda^2$, und addire zu ihr die zweite; dasselbe Verfahren wende man auf die erste und zweite Columne an. Darauf multiplizire man die zweite Reihe (Columne) mit $d^2(1+\lambda^2)$, die dritte mit $[-4s^2S^2\lambda^2(1-\lambda^2)]$, und addire zu ihr die zweite; dann lässt sich aus der Discriminante der Faktor

$$256 \cdot S^8s^4\lambda^8(1-\lambda^2)^2$$

absondern, und der andere Factor ist von der Form:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 \\ c_{12} & 0 & c_{23} & c_{24} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & c_{24} & c_{34} & c_{44} \end{vmatrix}$$

wo bedeutet:

$$c_{11} = 2s^2(1-\lambda^4)$$
$$c_{12} = 2(1+\lambda^2)$$
$$c_{13} = s^2(1-\lambda^2)\cdot[8S^2d^2\lambda^2(1+\lambda^2)^2 - 4S^2d^2\lambda^2(1-\lambda^2)^2 + 4s^2S^2\lambda^2\ (1+\lambda^2)^2 - A]$$
$$c_{23} = \cdot\cdot A$$
$$c_{24} = -[S^2(1+\lambda^2)^2 + 4d^2\lambda^2]$$
$$c_{33} = -8s^2S^2d^2\lambda^2(1-\lambda^4)[A - 4s^2S^2\lambda^2(1-\lambda^2)^2]$$
$$c_{34} = -4s^2S^2d^2\lambda^2(1-\lambda^4)\cdot 8S^2\lambda^2.$$
$$c_{44} = -8s^2S^2d^2\lambda^2(1-\lambda^4)$$
$$A = -S^4(1-\lambda^4)^2 + 16s^2d^2\lambda^4.$$

Schliesslich multiplizire man noch die letzte Reihe (Columne) mit $[-4S^2\lambda^2]$, und addire sie zur dritten, dann wird die vorstehende Determinante von der Form:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 \\ d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & 0 \\ 0 & d_{24} & 0 & d_{44} \end{vmatrix} = 2d_{44}d_{23}d_{12}d_{13} - d_{33}d_{11}d^2_{24} - d_{11}d_{44}d^2_{23} - d_{33}d_{44}d^2_{12} + d^2_{13}d^2_{24}$$

wo bedeutet:

$$d_{11} = 2s^2(1-\lambda^4)$$
$$d_{12} = 2(1+\lambda^2)$$
$$d_{13} = s^2(1-\lambda^2)[4S^2\lambda^2\{S^2(1+\lambda^2)^2 + 4d^2\lambda^2\} - A]$$
$$d_{23} = 4S^2\lambda^2\{S^2(1+\lambda^2)^2 + 4d^2\lambda^2\}$$
$$d_{24} = -\{S^2(1+\lambda^2)^2 + 4d^2\lambda^2\}$$
$$d_{33} = -8s^2S^2d^2\lambda^2(1-\lambda^4)\cdot[A - 4s^2S^2\lambda^2(1-\lambda^2)^2 - 16S^4\lambda^4]$$
$$d_{44} = -8s^2S^2d^2\lambda^2(1-\lambda^4).$$

Mit Beachtung der Relation

$$d_{13} = s^2(1-\lambda^2)d_{23}$$

wird

$$2d_{44}d_{23}d_{12}d_{13} - d_{11}d_{44}d^2_{23} + d^2_{13}d^2_{24} =$$
$$d^2_{23}s^4(1-\lambda^2)^2\,\{S^2 + 2\lambda^2(s^2-d^2) + S^2\lambda^4\}^2$$

Ebenso wird

$$-d_{33}d_{11}d^2_{24} - d_{33}d_{44}d^2_{12} = -d_{33}2s^2(1-\lambda^4)\,\{S^2 + 2\lambda^2(s^2-d^2) + S^2\lambda^4\}^2$$

Mithin ist

$$\Delta_1 = \{S^2+2\lambda^2(s^2-d^2) + S^2\lambda^4\}^2\,\{d_{23}{}^2s^4(1-\lambda^2)^2 - 2d_{33}s^2(1-\lambda^4)\}$$

Zur Berechnung des zweiten Factors $\Delta_2$ dieses Ausdrucks schreibe man denselben:

$$\Delta_2 = d^2_{23}(1-\lambda^2)s^4 + 16S^2s^4d^2\lambda^2(1-\lambda^4)^2[A - 4S^2s^2\lambda^2(1-\lambda^2)^2 - 16S^4\lambda^4]$$

Bezeichnet man

$$S + 2\lambda^2(s^2-d^2) + S^2\lambda^4 = \Lambda,$$

so ist

$$-d_{23} + \Lambda^2 = -8S^2d^2\lambda^2(1+\lambda^2)^2 = -\Pi;$$

demnach wird

$$\Delta_2 = s^4(1-\lambda^2)^2[(-\Lambda^2-\Pi)(-\Lambda^2-\Pi+2\Pi) + \Pi^2]$$
$$= s^4(1-\lambda^2)^2\Lambda^4,$$

und

$$\Delta_1 = \Lambda^6 \cdot s^4 \cdot (1-\lambda^2)^2.$$

Nimmt man noch den früher vernachlässigten Factor hinzu, so wird die gesuchte Discriminante der Gleichung der Normalenfläche:

$$\Delta = 256\ s^8 \cdot S^8 \cdot \lambda^8 \cdot (1-\lambda^2)^4 \cdot A^6.$$

Diese Discriminante verschwindet für $\Lambda = 0$; diese Gleichung definirt aber die durch die Nabelpunkte der Centralfläche gehenden Erzeugenden der Schaar $\lambda$. Denn zur Bestimmung derjenigen Erzeugenden, die durch die Nabelpunkte gehen, genügt es, die durch die Nabelpunkte einer Hauptebene gehenden Erzeugenden zu bestimmen, da jede solche Erzeugende durch drei Nabelpunkte geht. Die

Nabelpunkte in der Ebene $y=0$ sind definirt durch

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}\qquad\frac{z^2}{-c^2}=\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}.$$

Aus dem Gleichungssystem (1) folgt aber für $y=0$:

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda$$

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda},$$

mithin

$$2\frac{x}{a}=\lambda+\frac{1}{\lambda},$$

und setzt man hierin den soeben für $\frac{x}{a}$ gefundenen Werth ein, so folgt die Gleichung $\Lambda=0$, d. h. diese Gleichung definirt die vier durch die Nabelpunkte der Centralfläche gehenden Erzeugenden der Schaar $\lambda$, und diesen Geraden entsprechen acht Gerade auf der Parallelfläche.

Es verschwindet ferner die Discriminante für $\lambda=0$ und $\lambda^2=1$; allein diese Fälle bedürfen nach der früher gemachten Bemerkung einer besonderen Untersuchung. Stellt man zunächst die Gleichung der Normalenfläche für den Fall $\lambda=0$ auf, so entsteht dieselbe als Eliminationsresultat von xyz aus den Gleichungen:

$$\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\qquad 1+\frac{y}{b}=0$$

$$\frac{\xi-x}{x}a^2=\frac{\eta-y}{y}b^2=-\frac{\zeta-z}{z}c^2,$$

und lautet

$$ab\xi\eta+bc\eta\zeta+\xi as^2+\zeta c(b^2-a^2)-0;$$

wie man aber leicht sieht, ist die Discriminante dieser Gleichung von Null verschieden. — Für den Fall $\lambda^2=1$ ist die Untersuchung eine ähnliche; die

Gleichung der Normalenfläche erhält man durch Elimination von xyz aus den Gleichungen (1) und (2); die Gleichungen (1) kann man nun schreiben:

$$2\frac{x}{a} = \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \qquad \text{oder} \qquad \frac{x}{a} = \frac{1}{\lambda}$$
$$2\frac{z}{c} = \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\frac{y}{b} \qquad \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\frac{y}{b}.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen und

$$\frac{\xi - x}{x}a^2 = \frac{\eta - y}{y}b^2 = -\frac{\zeta - z}{z}c^2$$

die Grössen xyz, so folgt

$$(a^2 - b^2)b\eta + (a^2 + b^2)b\eta + (a^2 - b^2)c\zeta - ab\lambda\xi\eta - ac\lambda\xi\zeta = 0.$$

d. i. die Gleichung der Normalenfläche für die Fälle $\lambda^2 = 1$. Wie man sich auch hier leicht überzeugt, ist die Discriminante ungleich Null.

Man kommt somit zu dem Resultat, dass es unter den Geraden der Schaar $\lambda$ auf der Centralfläche nur vier Gerade giebt, denen Gerade auf der Parallelfläche entsprechen, und diese Geraden gehen durch die Nabelpunkte der Fläche.

Zu einem entsprechenden Resultat führt die Untersuchung bei der anderen Schaar von Erzeugenden. Man kann somit folgenden Satz aussprechen: Die Parallelfläche einer Centralfläche zweiten Grades enthält im Endlichen sechszehn Gerade, die den durch die Nabelpunkte der Centralfläche gehenden acht Erzeugenden entsprechen; diese Geraden gehen je durch drei Nabelpunkte der Parallelfläche und sind, wie im folgenden Abschnitt dargethan wird, Doppellinien der Fläche.

Die Frage, ob im Unendlichen Gerade auf der Fläche existiren, hat Roberts durch Betrachtung der

entwickelten Form der Gleichung der Parallelfläche dahin beantwortet, dass daselbst noch vier Gerade existiren; dieselben sind die gemeinsamen Tangenten des unendlich fernen Kugelkreises und des Kegelschnitts, in dem die Centralfläche die unendlich ferne Ebene schneidet.

Es erübrigt noch, die Frage zu entscheiden, ob mit den bisher aufgefundenen Geraden ihre Mannigfaltigkeit erschöpft ist oder nicht.

## § 2.

## Die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen der Existenz von Geraden auf der Parallelfläche einer Centralfläche zweiten Grades.

Theorem: Eine Gerade kann auf der Parallelfläche nur dann existiren, falls die entsprechende Curve der Centralfläche ein Centralschnitt ist.

Beweis I: Ist die Gleichung der Centralfläche

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}=1,$$

so ist

$$\frac{xu}{a^2}+\frac{yv}{b^2}+\frac{zw}{c^2}=1+\rho\cdot f(u,v,w)$$

die Gleichung der Tangentialebene der Parallelfläche in dem Punkte, der dem Punkte (u, v, w) entspricht. Die Bedingungen, dass diese Ebene durch zwei feste Punkte $(x_1\,y_1\,z_1)$ und $(x_2\,y_2\,z_2)$ geht, sind:

$$\frac{x_1u}{a^2}+\frac{y_1v}{b^2}+\frac{z_2w}{c^2}=1+\rho\cdot f(u,v,w)$$

$$\frac{x_2u}{a^2}+\frac{y_2v}{b^2}+\frac{z_1w}{c^2}=1+\rho\cdot f(u,v,w);$$

durch Subtraction beider Gleichungen erhält man

$$\frac{x_1 - x_2}{a^2} u + \frac{y_1 - y_2}{b^2} v + \frac{z_1 - z_2}{c^2} w = 0,$$

d. i. die Gleichung einer durch das Centrum gehenden Ebene; dies war zu beweisen.

Beweis II: Soll auf der Parallelfläche eine Gerade existiren, so müssen die Normalen alle einer Ebene

$$u + B_1 v + C_1 w = 0$$

parallel sein; nun sind die Richtungscosinus der Normalen proportional den Grössen

$$\frac{u}{a^2} \quad \frac{v}{b^2} \quad \frac{w}{c^2};$$

somit ist die Bedingung der Existenz einer Geraden

$$\frac{u}{a^2} + B_1 \frac{v}{b^2} + C_1 \frac{w}{c^2} = 0,$$

d. i. die Gleichung einer durch das Centrum gehenden Ebene, und dies war zu beweisen.

Da nun ein Centralschnitt der Fläche entweder aus einem Centralkegelschnitt oder aus einem Geradenpaar besteht, so sind diese beiden Fälle für sich zu betrachten. Der letztere Fall ist als erledigt zu betrachten, da bereits diejenigen Curven auf der Parallelfläche untersucht sind, die den Geraden der Centralfläche entsprechen. Es erübrigt mithin nur noch die Untersuchung des ersten Falles.

Es sei im Raum eine willkürliche Gerade und eine sie schneidende Ebene gegeben; eine zweite Gerade von constanter Länge bewegt sich so, dass ihr einer Endpunkt stets auf der festen Geraden schleift; der Ort derjenigen Punkte, die der andere Endpunkt mit der Ebene gemein hat, ist dann ein Centralkegelschnitt, vorausgesetzt, dass beide Gerade senkrecht auf einander stehen; denn der Ort des anderen Endpunktes im Raum ist ein Kreiscylinder,

und derselbe wird von einer beliebigen Ebene in einem Centralkegelschnitt geschnitten; die Axe des Cylinders, die „feste Gerade", geht durch das Centrum des Centralkegelschnitts.

Ist umgekehrt ein beliebiger Centralkegelschnitt gegeben, so kann man demselben vier, und nur vier feste Gerade im obigen Sinne zuordnen, und diese festen Geraden gehen durch das Centrum des Centralkegelschnitts, d. h. also mit anderen Worten, man kann vier reelle oder imaginäre Kreiscylinder finden, deren Schnittcurve mit der Ebene des Kegelschnitts diesen Kegelschnitt darstellt. Es sei

$$f = \alpha \cos u$$
$$g = \beta \sin u$$
$$h = 0$$

die Gleichung des gegebenen Kegelschnitts, und

$$x = Az + a$$
$$y = Bz + b$$

die Gleichung der gesuchten Geraden, dann ist die hinreichende und nothwendige Bedingung, dass diese Gerade eine feste Gerade des obigen Kegelschnitts ist, die, dass die Lothe p, die von den Punkten des Kegelschnitts auf die Gerade gefällt werden, von constanter Länge, d. h. unabhängig von u sind. Es muss also $\frac{dp}{du}$ identisch Null sein. Nun ist

$$p = \sqrt{\frac{[A(b-g) - B(a-f)]^2 + (a-f)^2 + (b-g)^2}{1 + A^2 + B^2}}.$$

und da A, B, a, b als constant anzusehen sind, so verschwindet $\frac{dp}{du}$ für

$$\cos u\,(\sin u \cdot \lambda - \mu) = \nu + \sin u \cdot \rho - \sin^2 u \cdot 2\nu,$$

wo gesetzt ist:

$$\lambda = \beta^2 - \alpha^2 + A^2\beta^2 - B^2\alpha^2$$
$$\mu = \beta(b + A^2 b - ABa)$$
$$\nu = AB\alpha\beta$$
$$\rho = \alpha(ABb - B^2 a - a).$$

Setzt man noch $\sin u = v$ und quadrirt die obige Gleichung, so wird:

$$(1 - v^2)(v\lambda - \mu)^2 = (\nu + v\rho - v^2 \cdot 2\nu)^2,$$

und diese Gleichung ist eine identische, falls die Coeffizienten der Potenzen von v identisch verschwinden, d. h. falls folgende Beziehungen bestehen:

(1) $$-\lambda^2 = 4\nu^2$$
(2) $$2\lambda\mu = -4\nu\rho$$
(3) $$-\mu^2 + \lambda^2 = -4\nu^2 + \rho^2$$
(4) $$-2\mu\lambda = 2\nu\rho$$
(5) $$\mu^2 = \nu^2.$$

Durch Addition von (2) und (4) erhält man:

$$2\nu\rho = 0,$$

d. h. entweder $\nu = 0$ oder $\rho = 0$. Die übrigen Gleichungen liefern nun

$$\mu^2 = \nu^2 = -\rho^2 = -\frac{\lambda^2}{4},$$

d. h. es müssen alle diese Grössen verschwinden. Nun liefert

| | | |
|---|---|---|
| $\nu = 0$ entweder | $A = 0$ | oder $B = 0$ |
| $\lambda = 0$ | $B^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2}$ | $A^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2}$ |
| $\mu = 0$ | $b = 0$ | $b = 0$ |
| $\rho = 0$ | $a = 0$ | $a = 0.$ |

Hieraus geht hervor, dass es zu jedem Centralkegelschnitt vier feste Gerade giebt; dieselben liegen zu zweien in den beiden Ebenen, die in den Axen des Kegelschnitts senkrecht errichtet sind zur Ebene des Kegelschnitts, und gehen durch das Centrum des Kegelschnitts. Im Falle des Kreises $(\alpha = \beta)$ fallen

sie zusammen zu der Geraden, die durch das Centrum geht und senkrecht zur Ebene des Kreises steht.

Es ist nun gezeigt, dass der Geraden auf der Parallelfläche ein Centralschnitt entsprechen muss, und dass man diesen Schnitt als wirklichen Kegelschnitt ansehen darf, da die übrigen Fälle bereits behandelt sind. Aus dem soeben Gesagten ist dann aber ersichtlich, dass die Gerade eine feste Gerade des Kegelschnitts sein muss, mithin durch sein Centrum, d. i. das Centrum der Fläche gehen muss.

Es sei

$$\text{(I)} \qquad \frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}=1$$

die Gleichung der Centralfläche, dann sind die Normalen, errichtet in dem Schnitt mit der Ebene

$$\text{(II)} \qquad \frac{u}{a^2}+B_1\frac{v}{b^2}+C_1\frac{w}{c^2}=0,$$

der Ebene

$$1+B_1v+C_1w=0$$

parallel, und sie schneiden die zu dieser Ebene senkrechte Gerade

$$y=B_1x \qquad z=C_1x,$$

falls zugleich

$$\text{(III)} \quad vwa^2(b^2-c^2)-uvC_1c^2(b^2-a^2)+uwB_1b^2(c^2-a^2)=0$$

ist. Um zu untersuchen, wann die Gleichungen I, II, III zugleich bestehen, eliminire man mit Hülfe von II aus I und III die Grösse u, dann lauten diese Gleichungen:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{aligned} v^2K+vwM+Pw^2&=0\\ v^2Q+vwR+w^2S-1&=0,\end{aligned}$$

wo bedeutet:

$$K = B_1 C_1 c^4 (b^2 - a^2)$$
$$M = b^2 c^2 \{(b^2 - c^2) + C_1^2 (b^2 - a^2) - B_1^2 (c^2 - a^2)\}$$
$$P = -B_1 C_1 b^4 (c^2 - a^2)$$
$$Q = \frac{1}{b^2} + B_1^2 \frac{a^2}{b^4}$$
$$R = 2 B_1 C_1 \frac{a^2}{b^2 c^2}$$
$$S = \frac{1}{c^2} + C_1^2 \frac{a^2}{c^4}.$$

Eliminirt man aus den letzten Gleichungen die Grösse v, so erhält man eine Gleichung vierten Grades in w, und falls die Coeffizienten in dieser Gleichung verschwinden, bestehen die drei Gleichungen I, II, III gleichzeitig. Die Resultante der beiden Gleichungen in v lautet:

$$(V) \qquad w^2 (KR - MQ)[(MS - PR) w^2 - M] = [K - w^2 (PQ - KS)]^2,$$

und setzt man hierin den Faktor von $w^4$ gleich Null, so wird

$$(KR - MQ)(MS - PR) = (PQ - KS)^2,$$

und nach mehreren Umformungen, die auf Grund der oben gegebenen Definitionen der Grössen K, M etc. gemacht werden, kommt man zu der Gleichung

$$[b^2 c^2 + B_1^2 a^2 c^2 + C_1^2 a^2 b^2][M^2 - 4KP] = 0,$$

und dieser Gleichung wird in den beiden Fällen genügt, wo eine der beiden Klammern verschwindet.

### Erster Fall: $b^2 c^2 + B_1^2 a^2 c^2 + C_1^2 a^2 b^2 = 0$.

Dieser Fall besagt, dass Gerade auf der Parallelfläche existiren können, falls ihnen Gerade auf der Centralfläche entsprechen. In der That wird die Centralfläche (I) von der Ebene (II) dann und nur

dann in Geraden geschnitten, falls die Discriminante der Gleichung der Schnittcurve oder einer Projection derselben, z. B. die Discriminante der Gleichung (IV) verschwindet, falls also

$$0 = \begin{vmatrix} Q & \frac{R}{2} & 0 \\ \frac{R}{2} & S & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

oder

$$4QS = R^2$$

oder

$$b^2c^2 + B_1{}^2a^2c^2 + C_1{}^2a^2b^2 = 0$$

ist; dies war zu beweisen. Nach Früherem bedarf dieser Fall keiner Erläuterung mehr.

### Zweiter Fall: $M^2 - KP = 0$.

Geht man auf die obige Eliminationsgleichung (V) zurück, so folgt durch Nullsetzen des von w ledigen Gliedes

$$K = 0,$$

und wegen

$$K = B_1C_1c^4(b^2 - a^2)$$

entweder

$$B_1 = 0$$

oder

$$C_1 = 0$$

oder beides zugleich. Wegen

$$M^2 = 4KP$$

folgt dann aber

$$M = 0$$

oder

$$b^2 - c^2 + C_1{}^2(b^2 - a^2) - B_1{}^2(c^2 - a^2) = 0.$$

Hieraus folgt, dass im Allgemeinen $B_1$ und $C_1$ zugleich nicht Null sein dürfen.

Es sei $B_1 = 0$, dann folgt aus $M = 0$

$$C_1^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2},$$

und es müsste die Ebene

$$\frac{u}{a^2} + \frac{w}{c^2}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}} = 0$$

auf der Centralfläche eine Curve ausschneiden, der auf der Parallelfläche eine Gerade entspricht. Man stelle zunächst die Gleichung der Curve auf, die diesem ebenen Schnitt entspricht. Allgemein gilt für die Coordinaten der Parallelfläche

$$x = u + \rho \frac{\frac{u}{a^2}}{\sqrt{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{w^2}{c^4}}}$$

$$y = v + \rho \frac{\frac{v}{b^2}}{\sqrt{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{w^2}{c^4}}}$$

$$z = w + \rho \frac{\frac{w}{c^2}}{\sqrt{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{w^2}{c^4}}}.$$

Aus

$$\frac{u^2}{a^4} = \frac{w^2}{c^4}\,\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$$

und

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} = 1$$

folgt

$$\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{w^2}{c^4} = \frac{1}{b^2},$$

und man hat für die Curve, die dem ebenen Schnitt entspricht:

$$x = u + \frac{b\rho}{a^2} u \qquad u = \frac{a^2}{a^2 + b\rho} x$$

$$y = v + \frac{\rho}{b} v \qquad v = \frac{b}{b+\rho} y$$

$$z = w + \frac{b\rho}{c^2} w \qquad w = \frac{c^2}{c^2 + b\rho} z.$$

Aus den gegebenen Gleichungen

$$\frac{u}{a^2} + \frac{w}{c^2}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}} = 0$$

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} = 1$$

folgt durch Elimination je einer Unbekannten:

$$\frac{u}{a^2} + \frac{w}{c^2}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}} = 0$$

$$\frac{v^2}{b^2} + \frac{u^2\, b^2\, a^2 - c^2}{a^2\, a^2\, b^2 - c^2} = 1$$

$$\frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2\, b^2\, a^2 - c^2}{c^2\, c^2\, b^2 - c^2} = 1,$$

und setzt man in diese Gleichungen die für u, v, w gefundenen Werthe ein, so wird:

$$\frac{x}{a^2 + b\rho} + \frac{z}{c^2 + b\rho}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}} = 0 \quad \ldots \quad \text{(a)}.$$

$$\frac{y^2}{(b+\rho)^2} + \frac{x^2}{(a^2 + b\rho)^2} \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2} b^2 = 1$$

$$\frac{y^2}{(b+\rho)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + b\rho)^2} \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2} b^2 = 1,$$

d. s. die Gleichungen der Projectionen der dem ebenen Schnitt entsprechenden Curve. Soll die Curve eine Gerade sein, so müssen auch die Projectionen Gerade sein; man sieht, dass dieses im Allgemeinen

nicht der Fall ist. Im Falle $\rho + b = 0$ jedoch wird die Curve auf der Parallelfläche zur Geraden, weil in diesem Falle der Kegelschnitt in der XZ Ebene in zwei Gerade degenerirt; man sieht dies auch leicht aus der allgemeinen Gleichung dieses Hauptschnitts (Roberts, Art. 4):

$$\frac{b^2 z^2}{b^2 - c^2} + \frac{b^2 x^2}{b^2 - a^2} + b^2 - \rho^2 = 0,$$

eine Gleichung, die für $\rho = b$ in die obige (a) übergeht.

In genau derselben Weise führt die Betrachtung des Falles $C_1 = 0$ zu dem Resultat, dass dem ebenen Schnitt

$$\frac{v}{b^2} + \frac{u}{a^2}\sqrt{\frac{c^2 - a^2}{b^2 - c^2}} = 0$$

im allgemeinen Falle keine Gerade entspricht, wohl aber im Falle $\rho = c$. Bei Einführung einer homogenen Bezeichnung folgt dann drittens, dass dem ebenen Schnitt

$$\frac{w}{c^2} + \frac{v}{b^2}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - a^2}} = 0$$

ebenfalls keine Gerade entspricht, ausgenommen im Falle $\rho = a$.

Das Resultat der jetzigen Untersuchungen ist also, dass im Endlichen die Parallelfläche nur da Gerade haben kann, wo diese den Geraden der Centralfläche entsprechen. Nach früheren Untersuchungen hat aber die Parallelfläche sechszehn imaginäre Gerade, die durch die Nabelpunkte gehen; im Unendlichen hat die Fläche noch vier Gerade. Für specielle Werthe des Parameters $\rho$ können in den

Hauptebenen noch Gerade auftreten: sie entstehen durch den Zerfall der Hauptkegelschnitte der Fläche.

## § 3.

### Die den Geraden des Paraboloids entsprechenden Curven auf der Parallelfläche.

Wie schon in § 1 dieses Abschnittes bemerkt ist, sind die Normalenflächen längs der Erzeugenden einer Regelfläche zweiten Grades im Allgemeinen gleichseitige Paraboloide; man kann auch für den jetzigen Fall dieses Resultat analytisch herleiten.

Die vorgelegte Fläche sei das hyperbolische Paraboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z,$$

dann ist die Gleichung einer willkürlichen Erzeugenden

$$(1) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda z \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda},$$

und die Gleichung einer Normalen:

$$\frac{\xi - x}{2x} a^2 = -\frac{\eta - y}{2y} b^2 = -(\zeta - z),$$

oder (2) $$xy(a^2 + b^2) - ya^2\xi - xb^2\eta = 0$$

(3) $$b^2(\eta - y) = 2y(\zeta - z).$$

Um die Gleichung der Fläche der Normalen herzuleiten, berechne man aus (1) (2) (3) die Werthe für y in doppelter Weise; man erhält dann

$$y^2 + y\left(\frac{1}{2}\frac{b}{\lambda} - \frac{1}{2} b\lambda\zeta \quad \frac{b^3\lambda}{4}\right) + \frac{b^3\lambda}{4}\eta = 0$$

$$y^2 + y\left(\frac{b}{\lambda} - \frac{ab\xi}{a^2 + b^2} - \frac{b^2\eta}{a^2 + b^2}\right) - \frac{b^3\eta}{\lambda(a^2 + b^2)} = 0;$$

die Resultante dieser beiden quadratischen Gleichungen

ist dann die Gleichung der Fläche der Normalen; sie ist

$$b^3\left(\frac{\lambda}{4}+\frac{1}{\lambda(a^2+b^2)}\right)\left[\frac{1}{2}\frac{b}{\lambda}-\frac{b^3\lambda}{4}+\frac{ab\xi}{a^2+b^2}+\frac{b^2\eta}{a^2+b^2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}b\lambda\zeta\right]\left[\frac{b}{\lambda}-\frac{ab\xi}{a^2+b^2}-\frac{b^2\eta}{a^2+b^2}\right]-b^6\eta\left(\frac{\lambda}{4}+\frac{1}{\lambda(a^2+b^2)}\right)^2$$
$$-\frac{b^3}{\lambda(a^2+b^2)}\left[-\frac{1}{2}\frac{b}{\lambda}-\frac{b^3\lambda}{4}+\frac{ab\xi}{a^2+b^2}+\frac{b^2\eta}{a^2+b^2}-\frac{1}{2}b\lambda\zeta\right]^2.$$

Man sieht, dass die Fläche der Normalen eine Fläche zweiten Grades ist, da sie aber eine Regelfläche ist, und die Erzeugenden einer Ebene parallel laufen, so muss sie ein hyperbolisches Paraboloid oder ein Cylinder[1]) sein. Deshalb ist die Gleichungsdeterminante gleich Null, und die characterische kubische Gleichung[2]) reducirt sich auf eine quadratische. Aber diese Gleichung ist rein quadratisch; denn bildet man aus der soeben hingeschriebenen Gleichung die Grössen

$$a_{11}=-\frac{a^2b^2\lambda}{4(a^2+b^2)^2}$$
$$a_{22}=-\frac{b^7\lambda}{4(a^2+b^2)^2}$$
$$a_{33}=+\frac{b^5\lambda}{4(a^2+b^2)}$$

und summirt sie, so folgt:

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=0,$$

d. h. die characteristische Gleichung ist rein quadratisch. Daraus folgt dann, dass das hyperbolische Paraboloid der Normalen ein gleichseitiges ist.

---

[1]) Es gilt von dieser Fläche genau dasselbe wie im Falle der centrischen Flächen (§ 1); es sind deshalb an dieser Stelle die Schlüsse nicht ausführlich wiederholt.

[2]) Salmon-Fiedler, Raum I, Art. 82 ff.

Die Curve, die der geraden Erzeugenden entspricht auf der Parallelfläche, entsteht nun als Ort der Endpunkte von constanten Strecken $\rho$, die auf den Normalen längs dieser Erzeugenden abgetragen werden; sie ist mithin der totale Durchschnitt der soeben beschriebenen Normalenfläche mit dem Kreiscylinder vom Radius $\rho$, dessen Axe die gerade Erzeugende ist. Als solche ist sie aber vom vierten Grade. Sie soll im nächsten Abschnitt als Coordinatencurve genommen werden.

Eine weitere Frage ist die, ob und wann einer geraden Erzeugenden des Paraboloids eine Gerade auf der Parallelfläche entspricht; es tritt dies ein, falls die Normalenfläche in zwei Ebenen degenerirt, und die analytische Bedingung hierfür ist das Verschwinden der Discriminante. Die früher gefundene Gleichung der Normalenfläche kann man auch schreiben, falls man die Abkürzungen

$$s^2 = a^2 + b^2$$
$$A = a^2\lambda^2 + 2$$
$$B = b^2\lambda^2 + 2$$

einführt:

$$[-s^2B + 4a\lambda\xi + 4b\lambda\eta - 2s^2\lambda^2\zeta][A - a\lambda^3\xi - b\lambda^3\eta - 2\lambda^2\zeta]$$
$$= b\lambda\eta(\lambda^2s^2 + 4)^2,$$

und somit sind die Coeffizienten in dieser Gleichung:

$$a_{11} = -4a^2\lambda^4$$
$$a_{22} = -4b^2\lambda^4$$
$$a_{33} = 4s^2\lambda^4$$
$$a_{44} = -s^2AB$$
$$a_{12} = -16ab\lambda^4$$
$$a_{13} = -16a\lambda^3 + 4as^2\lambda^5$$
$$a_{23} = -16b\lambda^3 + 4bs^2\lambda^5$$
$$a_{14} = 8a\lambda A + 2a\lambda^3s^2B$$
$$a_{24} = 8b\lambda A + 2b\lambda^3s^2B - 2b\lambda(4 + \lambda^2s^2)^2$$
$$a_{34} = 4\lambda^4s^2(b^2 - a^2).$$

Die gleich Null gesetzte Discriminante ist hiernach:

$$0 = \begin{vmatrix} -8a^2\lambda^4 & -8ab\lambda^4 & \\ -8ab\lambda^4 & -8b^2\lambda^4 & \\ -8a\lambda^3 + 2as^2\lambda^5 & 8b\lambda^3 + 2bs^2\lambda^5 & \\ 4aA\lambda + as^2\lambda^3 B & 4Ab\lambda + bs^2\lambda^3 B & b\lambda(4 + \lambda^2 s^2)^2 \\ -8a\lambda^3 + 2s^2 a\lambda^5 & 4Aa\lambda + as^2\lambda^3 B & \\ -8b\lambda^3 + 2s^2 b\lambda^5 & 4Ab\lambda + bs^2\lambda^3 B - b\lambda(4 + \lambda^2 s^2)^2 & \\ 8\lambda^4 s^2 & 2\lambda^4 s^2(b^2 - a^2) & \\ 2\lambda^4 s^2(b^2 - a^2) & -2s^2 AB. & \end{vmatrix}$$

Man dividire die erste Columne und Reihe durch a, die zweite Columne und Reihe durch b, und subtrahire die zweite Columne von der ersten, darauf die zweite Reihe von der ersten; alsdann wird

$$0 = \lambda^2(4 + \lambda^2 s^2)^2 \begin{vmatrix} -8\lambda^4 & -8\lambda^3 + 2s^2\lambda^5 \\ -8\lambda^3 + 2s^2\lambda^5 & 8\lambda^4 s^2 \end{vmatrix}$$

$$= -4\lambda^8(s^2\lambda^2 + 4)^2.$$

Dieser Gleichung wird genügt durch

$$\lambda = 0 \text{ und } 4 + s^2\lambda^2 = 0;$$

für $\lambda = 0$ wird indessen die Rechnung hinfällig, da dann in der Gleichung (1) unendlich grosse Summanden auftreten, und es bedarf der besonderen Untersuchung, ob im Unendlichen die Parallelfläche Gerade besitzt; in der That geht aus der entwickelten Gleichung der Parallelfläche hervor, dass im Unendlichen zwei Gerade existiren[1]). Die Gleichung

$$4 + s^2\lambda^2 = 0$$

besagt nun, dass die Parallelfläche im endlichen Gerade besitzt, die denjenigen Erzeugenden des Paraboloids entsprechen, die durch die Nabelpunkte

---

[1]) cf. Samuel Roberts, Proceedings of the London Math. Society, Vol. IV. 1873, pag. 64.

des Paraboloids gehen. In der That sind die Coordinaten der Nabelpunkte des Paraboloids

$$x = 0 \qquad x = \pm \frac{i}{1} as$$

$$y = \pm i \frac{b}{2} s \qquad y = 0$$

$$z = \frac{s^2}{4} \qquad z = -\frac{s^2}{4},$$

und die Einsetzung dieser Werthe in eine der Gleichungen (1) giebt

$$4 - s^2\lambda^2 = 0,$$

d. h. den genannten zwei Geraden der Schaar $\lambda = \text{const}$ entsprechen vier Gerade auf der Parallelfläche.

Ebenso giebt es in der anderen Schaar der Erzeugenden des Paraboloids zwei Gerade, denen wieder Gerade auf der Parallelfläche entsprechen; und diese Geraden gehen wieder durch die Nabelpunkte.

Abgesehen von den oben genannten unendlich fernen Geraden giebt es mithin acht Gerade auf der Parallelfläche des Paraboloids, die vier geraden Erzeugenden des Paraboloids entsprechen. Diese Geraden gehen durch die Nabelpunkte der Parallelfläche, da diese ja den Nabelpunkten des Paraboloids entsprechen, und sind überdies Doppellinien der Fläche, wie im dritten Abschnitt bewiesen wird.

§ 4.

**Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der Existenz von Geraden auf der Fläche.**

Im vorigen sind eine Anzahl von Geraden auf der Fläche gefunden. Eine weitere Frage ist es, ob noch mehr Gerade möglich sind, oder nicht.

Es sei

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + w = 0$$

die Gleichung eines Paraboloids, dann ist

$$\xi \frac{2u}{a} + \eta \frac{2v}{b} + \zeta + w = 0$$

die Gleichung der Tangentialebene im Punkte (uvw). Die Gleichung der Tangentialebene der Parallelfläche im entsprechenden Punkte ist somit

$$\xi \frac{2u}{a} + \eta \frac{2v}{b} + \zeta + w = \rho \cdot f(u, v, w).$$

Soll nun auf der Parallelfläche eine Gerade existiren, so müssen die Tangentialebenen in den Punkten derselben durch dieselbe gehen; soll aber die Tangentialebene durch zwei feste Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ und $(x_2 y_2 z_2)$ gehen, so muss

$$x_1 \frac{2u}{a} + y_1 \frac{2v}{b} + z_1 + w = \rho \cdot f(u, v, w)$$

$$x_2 \frac{2u}{a} + y_2 \frac{2v}{b} + z_2 + w = \rho \cdot f(u, v, w)$$

sein, oder u, v, w müssen der Gleichung

$$\frac{2u}{a}(x_1 - x_2) + \frac{2v}{b}(y_1 - y_2) + z_1 - z_2 = 0$$

genügen; d. h. existirt auf der Parallelfläche eine Gerade, so ist die entsprechende Curve des Paraboloids ein ebener Schnitt, der parallel zur Axe des Paraboloids geführt ist.

Zu demselben Resultat gelangt man durch die folgende Betrachtung. Soll eine Parallelfläche eine Gerade besitzen, so müssen die Normalen einer Ebene

(I) $$Ax + By + Cz = 0$$

parallel sein. Die Richtungscosinus der Normalen sind nun proportional den Grössen

$$\frac{2u}{a}, \quad \frac{2v}{b}, \quad 1:$$

sollen also die Normalen parallel der obigen Ebene sein, so müssen sie in der Schnittcurve des Paraboloids mit der Ebene

$$\text{(II)} \qquad A\frac{2u}{a} + B\frac{2v}{b} + C = 0$$

errichtet sein, d. i. das vorige Resultat.

Soll aber eine Gerade auf der Parallelfläche existiren, so muss die entsprechende Curve nicht nur die Schnittcurve des Paraboloids mit der Ebene (II) sein, es müssen vielmehr auch die Normalen durch eine Gerade

$$y = B_1x + b_1$$
$$z = C_1x + c_1$$

gehen, die senkrecht steht zur Ebene (I), die also senkrecht steht zu allen Normalen, und die also die Bedingungen

$$B_1 = \frac{B}{A} \qquad C_1 = \frac{C}{A}$$

erfüllt. Die Bedingung, dass diese Gerade von der Normalen:

$$\frac{x - u}{2u}a = \frac{y - v}{2v}b = z - w$$

geschnitten wird, ist:

$$\text{(III)} \qquad 2uvC_1(a - b) + 2uwB_1b - 2vwa + u(2bb_1C_1 - 2B_1c_1b - abB_1) + v(2c_1a + ab) - abb_1 = 0.$$

Fasst man alles bisher gesagte zusammen, so folgt, dass es eine Gerade auf der Parallelfläche nur geben kann, falls die entsprechende Curve auf dem Paraboloid zugleich der Gleichung (II) und der Gleichung (III) genügt.

Um zu ermitteln, ob es derartige Curven auf dem Paraboloid giebt, projicirt man erstens die Schnittcurve des Paraboloids mit der Ebene (II) auf die VW Ebene, zweitens die Schnittcurve der Fläche (III) mit der Ebene (II) auf die VW Ebene, und untersucht, wann beide Projectionen zusammenfallen. Substituirt man aus (II)

$$u = -B_1 \frac{a}{b} v - C_1 \frac{a}{2}$$

in die Gleichung (III) und in die Gleichung des Paraboloids, so wird

$$v^2 2C_1B_1 \frac{a}{b} \frac{b}{} + v \left[ C_1^2(a - b) + B_1(2b_1C_1 - 2B_1c_1 - aB_1) - 2(c_1 + b) + 2w \left\{ 1 + B_1^2 \right\} + \left[ bb_1 + \frac{C_1}{2} (2bb_1C_1 - 2B_1c_1b - abB_1) + wB_1C_1b \right] = 0 \right.$$

und

$$v^2 \left[ \frac{1}{b} + B_1^2 \frac{a}{b^2} \right] + vB_1C_1 \left[ \frac{a}{b} + w + C_1^2 \frac{a}{4} \right] = 0.$$

Bestehen beide Gleichungen für bestimmte $B_1$ und $C_1$ zugleich, so können nur den dazugehörigen Schnitten Gerade entsprechen. Zur Ermittelung derartiger Werthe $B_1C_1$ eliminire man aus beiden Gleichungen v, und setze in der Eliminationsgleichung die Coefficienten der Potenzen von w gleich Null. Da die Eliminationsgleichung von

$$av^2 + bv + c = 0$$
$$a_1v^2 + b_1v + c_1 = 0$$

(IV) $$(ab_1 - ba_1)(bc_1 - cb_1) = (ac_1 - ca_1)^2$$

ist, so ist der Coeffizient von $w^3$ in diesem Falle gleich

$$\left[ \frac{1}{b} + B_1^2 \frac{a}{b^2} \right] \left[ 1 + B_1^2 \right]^2,$$

und dieser Coeffizient verschwindet in zwei Fällen.

**Erster Fall: $aB_1^2 + b = 0$.**

Diese Gleichung besagt, dass Gerade auf der Parallelfläche nur existiren können, falls sie der Gleichung (II) zufolge, Curven auf dem Paraboloid entsprechen, die als Schnitte mit den Ebenen

$$\frac{2u}{a} + \sqrt{-\frac{b}{a}}\frac{2v}{b} + C_1 = 0$$

oder

$$\frac{u}{\sqrt{a}} \pm i\frac{v}{\sqrt{b}} + C_1\frac{\sqrt{a}}{2} = 0$$

entstehen. Betrachtet man nun die beiden Schaaren von Erzeugenden auf dem Paraboloid

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + w = 0,$$

so sind dieselben dargestellt durch

$$\frac{u}{\sqrt{a}} + i\frac{v}{\sqrt{b}} = -\lambda w \qquad \frac{u}{\sqrt{a}} - \frac{iv}{\sqrt{b}} = -\mu w$$

$$\frac{u}{\sqrt{a}} - i\frac{v}{b} = \frac{1}{\lambda} \qquad \frac{u}{\sqrt{a}} + i\frac{v}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\mu},$$

und man sieht, dass die Projectionsschaaren dieser Geraden auf die UV Ebene ausgedrückt werden durch

$$\frac{u}{\sqrt{a}} \pm i\frac{v}{\sqrt{b}} = \text{const},$$

d. h. der Fall $aB_1^2 + b = 0$ enthält die Erzeugenden des Paraboloids, nur ihnen können Gerade entsprechen.

**Zweiter Fall: $B_1^2 + 1 = 0$.**

Zur Untersuchung dieses Falles stelle man in der obigen Eliminationsgleichung (IV) den Factor

von $w^2$ her. Es enthält in der früher gebrauchten Bezeichnung

$(ab_1 - ba_1)$ die Grösse w in der höchsten Potenz 0,
$(bc_1 - cb_1)$ „ „ w „ „ „ „ 1.
$(ac_1 - ca_1)$ „ „ w „ „ „ „ 1,

und der Coeffizient von w in $(ac_1 - ca_1)$ ist:

$$B_1C_1\ 2\frac{a-b}{b} \quad b\left(\frac{1}{b} + B_1^2\frac{a}{b^2}\right) \quad -3B_1C_1\frac{a}{b}\frac{b}{},$$

und da $B_1$ nach Annahme von Null verschieden ist, so ist dieser Coeffizient gleich Null nur für $C_1 = 0$. Es können also gemäss der Gleichung (II) auf der Parallelfläche auch Gerade existiren, die dem Schnitt des Paraboloids mit der Ebene

$$\frac{u}{a} \pm i\frac{v}{b} = 0$$

entsprechen. Nun kann man die Gleichung der Parallelfläche offenbar in der Form

$$x = u + \rho\frac{\frac{2u}{a}}{\sqrt{4\frac{u^2}{a^2} + 4\frac{v^2}{b^2} + 1}}$$

$$y = v + \rho\frac{\frac{2v}{b}}{\sqrt{4\frac{u^2}{a^2} + 4\frac{v^2}{b^2} + 1}}$$

$$z = w + \rho\frac{1}{\sqrt{4\frac{u^2}{a^2} + 4\frac{v^2}{b^2} + 1}}$$

schreiben, wo die Grössen u, v, w durch die Gleichung des Paraboloids

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + w = 0$$

mit einander verknüpft sind. Unter der jetzigen Bedingung ist aber

$$\frac{4u^2}{a^2} + \frac{4u^2}{b^2} + 1 = 1,$$

daher

$$x = u + \rho \frac{2u}{a}$$

$$y = v + \rho \frac{2v}{b}$$

$$z = w + \rho$$

und umgekehrt

$$u = \frac{ax}{a + 2\rho}$$

$$v = \frac{by}{b + 2\rho}$$

$$w = z - \rho.$$

Aus den gegebenen Gleichungen

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + w = 0$$

und

$$\frac{u}{a} + i \frac{v}{b} = 0$$

folgt durch Elimination je einer Unbekannten

$$\frac{u}{a} + i \frac{v}{b} = 0$$

$$v^2 \frac{b - a}{b^2} + w = 0$$

$$u^2 \frac{a - b}{a^2} + w = 0,$$

und setzt man hierin die für uvw gefundenen Werthe ein, so wird

$$\frac{x}{a + 2\rho} + i \frac{y}{b + 2\rho} = 0$$

$$\frac{y^2}{(b + 2\rho)^2} (b - a) + z - \rho = 0$$

$$\frac{x^2}{(a + 2\rho)^2} (a - b) + z - \rho = 0.$$

Soll nun die dargestellte Curve eine Gerade sein, so muss jede Projection derselben eine Gerade sein. Wie aber aus dem System der letzten drei Gleichungen hervorgeht, sind die Projectionen der Curve auf die Hauptebenen keine Gerade, mithin ist die Curve selbst auch keine Gerade.

Als Resultat der vorstehenden Untersuchung ergiebt sich somit, dass die Parallelfläche eines Paraboloids nur Gerade enthält, falls diese Gerade gewissen Erzeugenden des Paraboloids entsprechen; und bei Beachtung des Resultats vom vorigen § folgt dann, dass die Parallelfläche des Paraboloids im Endlichen acht Gerade besitzt, im Unendlichen deren zwei.

# Dritter Abschnitt.

## Die Doppellinien der Parallelflächen.

### § 1.

### Die Doppellinien auf den Parallelflächen von Centralflächen zweiten Grades.

Wie bereits erwähnt, sind die Doppelcurven schon vielfach Gegenstand der Untersuchung gewesen; hier soll gezeigt werden, wie ein Coordinatensystem, bei dem die Geraden der Centralfläche, bezgl. die ihnen entsprechenden Curven vierter Ordnung Coordinaten-

curven sind, sich besonders zur Darstellung der Doppelcurven der Fläche eignet.

Es sei

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=1$$

die Gleichung der zu Grunde gelegten Centralfläche, dann sind

$$\frac{\xi}{a}-\frac{\zeta}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

$$\frac{\xi}{a}+\frac{\zeta}{c}=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

die Gleichungen zweier Ebenen, die je zwei Gerade aus der Centralfläche schneiden, und zwar gehören die ausgeschnittenen Geraden zwei verschiedenen Schaaren der Erzeugenden der Fläche an. Aus den drei hingeschriebenen Gleichungen erhält man für die Centralfläche die Parameterdarstellung

$$\xi=a\,\frac{\mu+\lambda}{\mu\lambda+1}$$

$$\eta=b\,\frac{\lambda\mu-1}{\mu\lambda+1}.$$

$$\zeta=c\,\frac{\mu-\lambda}{\mu\lambda+1}.$$

Die partiellen Ableitungen dieser Funktionen sind:

$$\frac{d\xi}{d\lambda}=a\,\frac{1-\mu^2}{(\lambda\mu+1)^2} \qquad \frac{d\xi}{d\mu}=a\,\frac{1-\lambda^2}{(\lambda\mu+1)^2}$$

$$\frac{d\eta}{d\lambda}=b\,\frac{2\mu}{(\mu\lambda+1)^2} \qquad \frac{d\eta}{d\mu}=b\,\frac{2\lambda}{(\lambda\mu+1)^2}$$

$$\frac{d\zeta}{d\lambda}=-c\,\frac{1+\mu^2}{(\mu\lambda+1)^2} \qquad \frac{d\zeta}{d\mu}=c\,\frac{1+\lambda^2}{(\lambda\mu+1)^2}.$$

Hieraus erhält man die Gauss'schen Grössen:

$$A=2bc(\mu+\lambda):(\lambda\mu+1)^3$$

$$B=2ac(\mu\lambda-1):(\lambda\mu+1)^3$$

$$C=ab(\lambda-\mu):(\lambda\mu+1)^3,$$

und demnach ist die Gleichung der Parallelfläche in den neuen Coordinaten:

$$x = a\frac{\mu+\lambda}{\mu\lambda+1} + \rho bc(\mu+\lambda)N^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = b\frac{\mu\lambda-1}{\mu\lambda+1} + \rho ac(\mu\lambda-1)N^{-\frac{1}{2}}$$

$$z = c\frac{\mu-\lambda}{\mu\lambda+1} + \rho ab(\lambda-\mu)N^{-\frac{1}{2}},$$

wo bedeutet:

$$N = b^2c^2(\lambda+\mu)^2 + a^2c^2(\mu\lambda-1)^2 + a^2b^2(\lambda-\mu)^2.$$

In dieser Gleichung stellen also die Curven $\lambda = \text{const}$ und $\mu = \text{const}$ zwei Schaaren von Curven vierter Ordnung dar, die den geraden Erzeugenden der Centralfläche entsprechen.

Sind nun einem Punkt der Parallelfläche zwei verschiedene Punkte der Centralfläche zugeordnet, so ist er jedenfalls ein Doppelpunkt der Parallelfläche, da in ihm zwei verschiedene Tangentenebenen existiren. Das Criterium eines solchen Doppelpunkts ist also, falls

$$x = \varphi(\lambda, \mu) \qquad y = \psi(\lambda, \mu) \qquad z = \chi(\lambda, \mu)$$

die Gleichung der Parallelfläche ist:

$$\varphi(\mu_0, \lambda_0) = \varphi(\mu_1, \lambda_1)$$
$$\psi(\mu_0, \lambda_0) = \psi(\mu_1, \lambda_1)$$
$$\chi(\mu_0, \lambda_0) = \chi(\mu_1, \lambda_1).$$

Im vorliegenden Falle soll nun nicht dieses Gleichungssystem untersucht werden, sondern an dessen Stelle zwei andere; bei dem ersten soll $\lambda_0 = \lambda_1$, beim zweiten $\mu_0 = \mu_1$ sein.

Setzt man $\lambda_0 = \lambda_1$, d. h. untersucht man die Doppelpunkte der Curve $\lambda = \text{const}$, so sind die Existenzbedingungen eines solchen:

$$
\begin{aligned}
&a\,\frac{\mu_0+\lambda}{\mu_0\lambda+1}+\rho bc(\mu_0+\lambda)N(\mu_0)^{-\frac{1}{2}}\\
&\qquad=a\,\frac{\mu_1+\lambda}{\mu_1\lambda+1}+\rho bc(\mu_1+\lambda)\cdot N(\mu_1)^{-\frac{1}{2}}\\
(1)\qquad &b\,\frac{\mu_0\lambda-1}{\mu_0+\lambda}+\rho ca(\mu_0\lambda-1)\cdot N(\mu_0)^{-\frac{1}{2}}\\
&\qquad b\,\frac{\mu_1\lambda-1}{\mu_1+\lambda}+\rho ca(\mu_1\lambda-1)\cdot N(\mu_1)^{-\frac{1}{2}}\\
&c\,\frac{\mu_0-\lambda}{\mu_0\lambda+1}+\rho ab(\mu_0-\lambda)\cdot N(\mu_0)^{-\frac{1}{2}}\\
&\qquad=c\,\frac{\mu_1-\lambda}{\mu_1\lambda+1}+\rho ab(\mu_1-\lambda)\cdot N(\mu_1)^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

und in diesen Gleichungen bedeuten die Symbole $N(\mu_0)$ und $N(\mu_1)$, dass in der Function $N$ $\mu_0$ und $\mu_1$ statt $\mu$ gesetzt sind. Setzt man aus der ersten Gleichung den Werth von $N(\mu_1)$ in die zweite und dritte ein, und eliminirt dann aus den beiden resultirenden Gleichungen die Grösse $\mu_1$, so erhält man die unten stehende Gleichung ($2^a$). Eliminirt man mit Hülfe der zweiten Gleichung des Systems (1) die Grösse $N(\mu_1)$, und eliminirt man dann $\mu_1$, so erhält man ($2^b$). Analog erhält man ($2^c$):

$$
\begin{aligned}
&N(\mu_0)^{\frac{1}{2}}\cdot\Lambda\cdot(1-\lambda^2)\cdot[a^2N(\mu_1)^{\frac{1}{2}}+\rho abc(\mu_0\lambda+1)]=0\\
(2)\qquad &N(\mu_0)^{\frac{1}{2}}\cdot\Lambda\cdot\lambda\cdot[b^2N(\mu_0)^{\frac{1}{2}}+\rho abc(\mu_0\lambda+1)]=0\\
&N(\mu_0)^{\frac{1}{2}}\cdot\Lambda\cdot(1+\lambda^2)\cdot[c^2N(\mu_0)^{\frac{1}{2}}+\rho abc(\mu_0\lambda+1)]=0.
\end{aligned}
$$

Ein analog gebautes Gleichungssystem erhält man, wenn man mit den Grössen $N(\mu_0)$ und $\mu_0$ ebenso operirt wie mit den Grössen $N(\mu_1)$ und $\mu_1$. Das System lautet:

$$
\begin{aligned}
&N(\mu_1)^{\frac{1}{2}}\cdot\Lambda\cdot(1-\lambda^2)\cdot[a^2N(\mu_1)^{\frac{1}{2}}+\rho abc(\mu_1\lambda+1)]=0\\
(3)\qquad &N(\mu_1)^{\frac{1}{2}}\cdot\Lambda\cdot\lambda\cdot[b^2N(\mu_1)^{\frac{1}{2}}+\rho abc(\mu_1\lambda+1)]=0\\
&N(\mu_1)^{\frac{1}{2}}\cdot\Lambda\cdot(1+\lambda^2)\cdot[c^2N(\mu_1)^{\frac{1}{2}}+\rho abc(\mu_1\lambda+1)]=0.
\end{aligned}
$$

In beiden Systemen hat $\Lambda$ den im § 1 des vorigen Abschnitts definirten Werth

$$\Lambda = 4b^2\lambda^2 + c^2(1+\lambda^2)^2 + a^2(1-\lambda^2)^2.$$

Untersucht man zweitens die Curvenschaar $\mu = \text{const}$, so sind die Existenzbedingungen für den Doppelpunkt einer solchen Curve:

$$\begin{aligned}
&a\,\frac{\mu+\lambda_0}{\lambda_0\mu+1} + \rho bc(\mu+\lambda_0)N(\lambda_0)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad = a\,\frac{\mu+\lambda_1}{\lambda_1\mu+1} + \rho bc(\mu+\lambda_1)N(\lambda_1)^{-\frac{1}{2}} \\
&b\,\frac{\mu\lambda_0-1}{\mu\lambda_1+1} + \rho ca(\mu\lambda_0-1)N(\lambda_0)^{-\frac{1}{2}} \qquad (4)\\
&\qquad = b\,\frac{\mu\lambda_1-1}{\mu\lambda_1+1} + \rho ca(\mu\lambda_1-1)N(\lambda_1)^{-\frac{1}{2}} \\
&c\,\frac{\mu-\lambda_0}{\mu\lambda_0+1} + \rho ab(\lambda_1-\mu)N(\lambda_0)^{-\frac{1}{2}} \\
&\qquad = c\,\frac{\mu-\lambda_1}{\mu\lambda_1+1} + \rho ab(\lambda_1-\mu)N(\lambda_1)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Verfährt man mit diesem Gleichungssystem genau so wie mit dem System (1), so erhält man die beiden Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned}
&N(\lambda_0)^{\frac{1}{2}}\cdot M\cdot(1-\mu^2)\cdot[a^2N(\lambda_0)^{\frac{1}{2}} + \rho abc(\mu\lambda_0+1)] = 0\\
&N(\lambda_0)^{\frac{1}{2}}\cdot M\cdot\ \mu\ \cdot[b^2N(\lambda_0)^{\frac{1}{2}} + \rho abc(\mu\lambda_0+1)] = 0 \qquad (5)\\
&N(\lambda_0)^{\frac{1}{2}}\cdot M\cdot(1+\mu^2)\cdot[c^2N(\lambda_0)^{\frac{1}{2}} + \rho abc(\mu\lambda_0+1)] = 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&N(\lambda_1)^{\frac{1}{2}}\cdot M\cdot(1-\mu^2)\cdot[a^2N(\lambda_1)^{\frac{1}{2}} + \rho abc(\mu\lambda_1+1)] = 0\\
&N(\lambda_0)^{\frac{1}{2}}\cdot M\cdot\ \mu\ \cdot[b^2N(\lambda_1)^{\frac{1}{2}} + \rho abc(\mu\lambda_1+1)] = 0 \qquad (6)\\
&N(\lambda_1)^{\frac{1}{2}}\cdot M\cdot(1-\mu^2)\cdot[c^2N(\lambda_1)^{\frac{1}{2}} + \rho abc(\mu\lambda_1+1)] = 0.
\end{aligned}$$

Analog bedeutet hier

$$M = 4b^2\mu^2 + c^2(1+\mu^2)^2 + a^2(1-\mu^2)^2.$$

Discussion. Die Gleichungssysteme (2) und (3) haben den gemeinsamen Faktor $\Lambda$; das Verschwinden dieses Faktors giebt daher einen Doppelpunkt in der Curve $\lambda = \text{const}$ an; dieser Faktor ist aber unabhängig von den Grössen $\mu_0$ und $\mu_1$, und es folgt, dass die Curve $\Lambda = 0$ eine Doppelcurve der Fläche ist. Ebenso folgt aus den Gleichungssystemen (5) und (6), dass die Curve $M = 0$ eine Doppelcurve der Fläche ist. Nach den Bemerkungen im § 1 des vorigen Abschnitts sind diese Curven aber die 16 Geraden auf der Parallelfläche; mithin sind diese Geraden Doppellinien der Fläche.

In den Gleichungen (2) und (3) treten ferner u. a. die Faktoren

$$\begin{aligned} a^2 N(\mu_0)^{\frac{1}{2}} + \rho abc(\mu_0\lambda + 1) &= 0 \\ a^2 N(\mu_1)^{\frac{1}{2}} + \rho abc(\mu_1\lambda + 1) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

auf; hieraus folgt, dass die so definirten Grössen $\mu_0$ und $\mu_1$ einen Doppelpunkt liefern in der Curve $\lambda = \text{const}$, falls zugleich einer der Gleichungen (1) genügt wird; durch diese Wahl der Grössen $\mu_0$ und $\mu_1$ wird aber der Gleichung (1a) genügt; folglich besitzt die Curve $\lambda = \text{const}$ in dem durch Gleichung (7) definirten Punkte einen wirklichen Doppelpunkt. Ebenso folgt aus den Gleichungen (4), (5), (6), dass die Curven $\mu = \text{const}$ wirkliche Doppelpunkte da haben, wo

$$\begin{aligned} a^2 N(\lambda_0)^{\frac{1}{2}} + \rho abc(\mu\lambda_0 + 1) &= 0 \\ a^2 N(\lambda_1)^{\frac{1}{2}} + \rho abc(\mu\lambda_1 + 1) &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

ist. Aus den Gleichungen (7) und (8) folgt dann, dass

$$a^2 N^{\frac{1}{2}} + \rho abc(\mu\lambda + 1) = 0$$

der Ort derjenigen Punkte ist, die sowohl Doppel-

punkte in der Schaar $\lambda = \text{const}$ als auch $\mu = \text{const}$ sind. Diese Linie ist mithin nach dem anfangs aufgestellten Criterium eine Doppelcurve der Fläche. Sie ist der Schnitt der Fläche mit der Ebene $x = 0$, soweit dieser Schnitt nicht Parallelcurve ist. Denn nach der früher gegebenen Parameterdarstellung ist

$$x = \frac{1}{a}\frac{\mu+\lambda}{\mu\lambda+1} N^{\frac{1}{2}} [a^2 N^{\frac{1}{2}} + \rho abc(\mu\lambda+1)],$$

und es wird $x = 0$ erstens für $\mu + \lambda = 0$; dann ist aber auch $\xi = 0$, d. h. man hat als Schnitt der Fläche die Parallelcurve des Hauptschnitts der Centralfläche; dieselbe ist vom Grade 8. Zweitens wird $x = 0$ für

$$a^2 N^{\frac{1}{2}} + \rho abc(\mu\lambda+1) = 0;$$

da die Parallelfläche vom Grade 12 ist, so ist dieser Schnitt vom Grade 4; da er aber nach dem abgeleiteten eine Doppelcurve ist, so erkennt man ihn als Doppelkegelschnitt. Für die Ausdrücke

$$b^2 N^{\frac{1}{2}} + \rho abc(\mu\lambda+1) = 0$$

$$c^2 N^{\frac{1}{2}} + \rho abc(\mu\lambda+1) = 0$$

gilt offenbar genau dasselbe; man kommt somit zu dem Resultat: Die Parallelfläche besitzt drei Doppelkegelschnitte in den Hauptebenen.

Die Gleichungen (2) und (3) lehren, dass die Punkte $(\mu_0 \mu_1)$, definirt durch

$$N(\mu_0) = 0 \qquad N(\mu_1) = 0,$$

Doppelpunkte der Curve $\lambda = \text{const}$ sind, falls zugleich einer der Gleichungen (1) genügt wird; dies ist in der That der Fall. Ebenso folgt, dass

$$N(\lambda_0) = 0 \qquad N(\lambda_1) = 0$$

Doppelpunkte der Curve $\mu = \text{const}$ liefern. Mithin definirt die Gleichung $N = 0$ eine Doppellinie der Fläche. Für $N = 0$ wird aber $x = y = z = \infty$; somit hat die Parallelfläche im Unendlichen auch Doppel-

punkte. Wie aus der entwickelten Form der Gleichung hervorgeht, ist der Ort dieser Doppelpunkte der unendlich ferne Kugelkreis und der unendlich ferne Kegelschnitt der Centralfläche. (Roberts.)

Man hat als Doppellinien der Fläche somit erkannt:

1) die 16 Geraden,
2) die drei Hauptkegelschnitte,
3) die beiden Kegelschnitte im Unendlichen.

Alle diese Curven besitzen zusammen den Grad 26. Allgemein ist aber die Ordnung der Doppelcurve einer Parallelfläche einer Fläche $m^{ten}$ Grades:[1])

$$m(2m^5 - 4m^4 + 6m^3 - 18m^2 + 22m - 7),$$

ein Ausdruck, der für $m = 2$ den Werth 26 annimmt; mithin sind alle Doppelcurven der Fläche gefunden.

## § 2.

### Die Doppelcurven auf der Parallelfläche eines Paraboloids.

Die Gleichung des zu Grunde gelegten Paraboloids sei

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = \xi,$$

dann schneiden die Ebenenschaaren

$$\frac{\xi}{a} - \frac{\eta}{b} = \lambda\zeta$$

$$\frac{\xi}{a} - \frac{\eta}{b} = \mu\zeta$$

---

[1]) Roberts, Proceedings of the London Math. Society. Vol. IV, 1873.

aus dem Paraboloid je zwei Schaaren von Geraden aus, und zwar derart, dass durch jeden Punkt der Fläche zwei Gerade gehen. Man ist deshalb berechtigt, die Gleichung des Paraboloids mit Hülfe der Parameter $\lambda$ und $\mu$ aufzustellen. Berechnet man aus den obigen drei Gleichungen die Grössen $\xi$ $\eta$ $\zeta$, so ist

$$\xi = \frac{a}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu}$$

$$\eta = \frac{b}{2}\frac{\lambda-\mu}{\lambda\mu}$$

$$\zeta = \frac{1}{\lambda\mu}.$$

Bildet man die partiellen Ableitungen

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = -\frac{a}{2\lambda^2} \qquad \frac{d\xi}{d\mu} = -\frac{a}{2\mu^2}$$

$$\frac{d\eta}{d\lambda} = \frac{b}{2\lambda^2} \qquad \frac{d\eta}{d\mu} = -\frac{b}{2\mu^2}$$

$$\frac{d\zeta}{d\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2\mu} \qquad \frac{d\zeta}{d\mu} = -\frac{1}{\mu^2\lambda},$$

und die Gauss'schen Grössen

$$A = -\frac{b(\lambda+\mu)}{2\lambda^3\mu^3} \qquad B = \frac{a(\lambda-\mu)}{2\lambda^3\mu^3} \qquad C = \frac{ab}{2\lambda^2\mu^2},$$

so ergiebt sich die Gleichung der Parallelfläche in der Form:

$$x = \frac{a}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu} - \rho b(\lambda+\mu)N^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{b}{2}\frac{\lambda-\mu}{\lambda\mu} + \rho a(\lambda-\mu)N^{-\frac{1}{2}}$$

$$z = \frac{1}{\lambda\mu} + \rho ab\lambda\mu N^{-\frac{1}{2}},$$

wo bedeutet

$$N = \{b(\lambda+\mu)\}^2 + \{a(\lambda-\mu)\}^2 + \{ab\lambda\mu\}^2.$$

Verfährt man bei der Untersuchung der Doppellinien genau so wie im vorigen §, so ist das Criterium eines Doppelpunktes in der Curve $\lambda = \text{const}$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{2}\frac{\lambda+\mu_0}{\lambda\mu_0} - \rho b(\lambda+\mu_0)N(\mu_0)^{-\frac{1}{2}} \\
&\qquad = \frac{a}{2}\frac{\lambda+\mu_1}{\lambda\mu_1} - \rho b(\lambda+\mu_1)N(\mu_1)^{-\frac{1}{2}} \\
&\frac{b}{2}\frac{\lambda-\mu_0}{\lambda\mu_0} + \rho a(\lambda-\mu_0)N(\mu_0)^{-\frac{1}{2}} \\
&\qquad = \frac{b}{2}\frac{\lambda-\mu_1}{\lambda\mu_1} + \rho a(\lambda-\mu_1)N(\mu_1)^{-\frac{1}{2}} \\
&\frac{1}{\lambda\mu_0} + \rho ab\lambda\mu_0 N(\mu_0)^{-\frac{1}{2}} \\
&\qquad = \frac{1}{\lambda\mu_1} + \rho ab\lambda\mu_1 N(\mu_1)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Berechnet man aus einer dieser Gleichungen $N(\mu_1)$ und setzt den Werth in die beiden anderen ein, so resultiren zwei in $\mu_1$ lineare Gleichungen; die Elimination von $\mu_1$ aus ihnen liefert dann eine Gleichung in $\mu_0$. Je nachdem man $N(\mu_1)$ aus der ersten, zweiten oder dritten Gleichung berechnet, erhält man die drei folgenden Definitionsgleichungen von $\mu_0$:

$$
\begin{aligned}
&N(\mu_0)^{\frac{1}{2}}\left[4+(a^2+b^2)\lambda^2\right]\left[\frac{a^2}{2}N(\mu_0)^{\frac{1}{2}} - \rho ab\mu_0\lambda\right] = 0 \\
&N(\mu_0)^{\frac{1}{2}}\left[4+(a^2+b^2)\lambda^2\right]\left[\frac{b^2}{2}N(\mu_0)^{\frac{1}{2}} + \rho ab\mu_0\lambda\right] = 0 \\
&N(\mu_0)\left[4+(a^2+b^2)\lambda^2\right]^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Berechnet man andererseits $N(\mu_0)$ aus einer der Gleichungen des Systems (1) und setzt den Werth in die beiden übrigen ein, so erhält man zwei in $\mu_0$ lineare Gleichungen. Eliminirt man aus ihnen $\mu_0$, so erhält man, je nachdem man die erste, zweite oder dritte Gleichung des Systems (1) zur Berech-

nung von $N(\mu_0)$ gebraucht hat, die drei folgenden Gleichungen:

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
&N(\mu_1)^{\frac{1}{2}}\left[4+(a^2+b^2)\lambda^2\right]\left[\frac{a^2}{2}N(\mu_1)^{\frac{1}{2}}-\rho ab\mu_1\lambda\right]=0\\
&N(\mu_1)^{\frac{1}{2}}\left[4+(a^2+b^2)\lambda^2\right]\left[\frac{b^2}{2}N(\mu_1)^{\frac{1}{2}}+\rho ab\mu_1\lambda\right]=0\\
&N(\mu_1)\quad\left[4+(a^2+b^2)\lambda^2\right]\qquad\qquad\qquad\qquad=0.
\end{aligned}
$$

In ganz derselben Weise untersucht man die Curvenschaar $\mu=\text{const}$. Das Criterium eines Doppelpunktes auf der Curve $\mu=\text{const}$ ist:

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
&\frac{a}{2}\frac{\lambda_0+\mu}{\lambda_0\mu}-\rho b(\lambda_0+\mu)N(\lambda_0)^{-\frac{1}{2}}\\
&\qquad=\frac{a}{2}\frac{\lambda_1+\mu}{\lambda_1\mu}-\rho b(\lambda_1+\mu)N(\lambda_1)^{-\frac{1}{2}}\\
&\frac{b}{2}\frac{\lambda_0-\mu}{\lambda_0\mu}+\rho a(\lambda_0-\mu)N(\lambda_0)^{-\frac{1}{2}}\\
&\qquad=\frac{b}{2}\frac{\lambda_1-\mu}{\lambda_1\mu}+\rho b(\lambda_1-\mu)N(\lambda_1)^{-\frac{1}{2}}\\
&\frac{1}{\lambda_0\mu}+\rho ab\lambda_0\mu N(\lambda_0)^{-\frac{1}{2}}\\
&\qquad=\frac{1}{\lambda_1\mu}+\rho ab\lambda_1\mu N(\lambda_1)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Macht man die Elimination von $\lambda_0$ und $\lambda_1$ gerade so wie vorhin angegeben, so erhält man für die Doppelpunktsparameter folgende Definitionsgleichungen:

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
&N(\lambda_0)^{\frac{1}{2}}\left[4+(a^2+b^2)\mu^2\right]\left[\frac{a^2}{2}N(\lambda_0)^{\frac{1}{2}}-\rho ab\lambda_0\mu\right]=0\\
&N(\lambda_0)^{\frac{1}{2}}\left[4+(a^2+b^2)\mu^2\right]\left[\frac{b^2}{2}N(\lambda_0)^{\frac{1}{2}}+\rho ab\lambda_0\mu\right]=0\\
&N(\lambda_0)\quad\left[4+(a^2+b^2)\mu^2\right]\qquad\qquad\qquad\qquad=0
\end{aligned}
$$

und

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
&N(\lambda_1)^{\frac{1}{2}}\left[4+(a^2+b^2)\mu^2\right]\left[\frac{a^2}{2}N(\lambda_1)^{\frac{1}{2}}-\rho ab\lambda_1\mu\right]=0\\
&N(\lambda_1)^{\frac{1}{2}}\left[4+(a^2+b^2)\mu^2\right]\left[\frac{b^2}{2}N(\lambda_1)^{\frac{1}{2}}+\rho ab\lambda_1\mu\right]=0\\
&N(\lambda_1)\quad[4+(a^2+b^2)\mu^2]\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=0.
\end{aligned}
$$

Discussion. Die Gleichungen (2) und (3) definiren Werthe $\mu_0$ und $\mu_1$, die einen Doppelpunkt der Curve $\lambda=\text{const}$ characterisiren, falls sie zugleich eine der Gleichungen (1) befriedigen. Da jedoch in allen Gleichungen (2) und (3) der Faktor $[4+(a^2+b^2)\lambda^2]$ auftritt, so folgt, dass eine Curve

$$4+(a^2+b^2)\lambda^2=0$$

in allen ihren Punkten als Doppellinie zu betrachten ist. Ebenso folgt aus den Gleichungen (5) und (6), dass die Curve

$$4+(a^2+b^2)\mu^2=0$$

eine Doppellinie der Fläche ist. Diese Curven sind aber nach § 3 die acht Geraden auf der Parallelfläche; folglich sind diese acht Geraden Doppellinien der Fläche.

Durch die Gleichungen (2) und (3) wird ferner ein System $(\mu_0\mu_1)$ definirt:

$$\frac{a^2}{2}N(\mu_0)^{\frac{1}{2}}-\rho ab\mu_0\lambda=0$$

$$\frac{a^2}{2}N(\mu_1)^{\frac{1}{2}}-\rho ab\mu_1\lambda=0,$$

und die so definirten Punkte sind Doppelpunkte der Curve $\lambda=\text{const}$, weil diese Werthe $\mu_0\,\mu_1$ die erste Gleichung des Systems (1) befriedigen. Ebenso sind die Punkte $\lambda_0\lambda_1$, definirt durch

$$\frac{a^2}{2}N(\lambda_0)^{\frac{1}{2}}-\rho ab\lambda_0\mu=0$$

$$\frac{a^2}{2}N(\lambda_1)^{\frac{1}{2}}-\rho ab\lambda_1\mu=0$$

Doppelpunkte in der Curve $\mu = \text{const}$; es geht dies analog aus den Gleichungen (4), (5), (6) hervor. Hieraus folgt, dass die Curve

$$\frac{a^2}{2} N^{\frac{1}{2}} - \rho ab\lambda\mu = 0$$

eine solche ist, deren Punkte sowohl Doppelpunkte in der Curve $\lambda = \text{const}$ als auch $\mu = \text{const}$ sind; diese Curve ist somit nach dem anfangs aufgestellten Criterium eine Doppellinie der Fläche. Ebenso folgt, dass

$$\frac{b^2}{2} N^{\frac{1}{2}} + \rho ab\lambda\mu = 0$$

eine Doppellinie darstellt. Diese Doppellinien liegen in den Hauptebenen der Fläche und machen den Theil der Hauptschnitte aus, der nicht Parallelcurve ist. Denn nach der oben gegebenen Parameterdarstellung ist

$$x = \frac{\lambda + \mu}{\lambda\mu} \frac{1}{a} N^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[ \frac{a^2}{2} N^{\frac{1}{2}} - \rho ab\lambda\mu \right],$$

und es wird $x = 0$ zunächst für $(\lambda + \mu) = 0$; dann wird aber auch $\xi = 0$, und man erhält die Parallelcurve des Hauptschnitts des Paraboloids. Zweitens wird aber $x = 0$ für

$$\frac{a^2}{2} N^{\frac{1}{2}} - \rho ab\lambda\mu = 0,$$

d. i. die Gleichung der Doppellinie. Analoges gilt für die Ebene $y = 0$. Diese Doppellinien in den Hauptebenen sind vom zweiten Grade. Denn der ganze Hauptschnitt ist vom Grade 10; da die Parallelcurve vom Grade 6 ist, so bleibt für den Rest der Grad 4; dieser Rest ist aber eine Doppellinie, dieselbe ist deshalb ein Kegelschnitt.

Dieselben Betrachtungen führen dazu, dass die Parallelfläche in $N = 0$ Doppelpunkte besitzen muss;

für $N=0$ wird aber $x=y=z=\infty$, und es bedarf deshalb einer besonderen Untersuchung. Dieselbe ergiebt bekanntlich den unendlich fernen Kugelkreis als Doppellinie.

Hiermit ist die Zahl der Doppellinien erschöpft. Denn aus der Betrachtung der Reciprocalflächen geht hervor, dass die Parallelfläche des Paraboloids im Allgemeinen eine Doppellinie vom Grade 14 besitzt. Dieselbe ist in der That gefunden; sie besteht aus den acht Geraden, aus zwei Hauptkegelschnitten und aus dem unendlich fernen Kugelkreise.